O problema do ensino da órbita da Terra

João Batista Garcia Canalle
Instituto de Física/UERJ
canalle@uerj.br

Resumo

Este trabalho foi motivado pela reação inesperada de centenas de professores participantes da Olimpíada Brasileira de Astronomia (OBA) quando afirmamos no gabarito da IV OBA, realizada em 2001, que a órbita da Terra é quase um círculo. Neste trabalho desenhamos, na seção 2, um conjunto de 14 elipses "de referência" com diferentes excentricidades para ilustrar o "achatamento" da órbita/elipse em função da excentricidade. Mostramos também, na seção 3 a excentricidade das órbitas dos planetas, na seção 4 as evidências contra a alta excentricidade das órbitas dos planetas, na seção 5 como desenhar elipses com determinadas excentricidades usando um barbante ou simplesmente a mão livre ou ainda um editor de texto tal como o Word, na seção 6 como determinar a excentricidade de elipses já desenhadas e na seção 7 as conclusões.

1. Introdução

Sempre que os livros didáticos do ensino fundamental ensinam a trajetória da órbita da Terra ao redor do Sol, desenham uma figura tal qual a Fig. 1. Os livros de Física do ensino médio usam a mesma figura quando explicam as leis de Kepler. A posição do Sol dentro desta elipse varia conforme o livro, mas pode ir da posição central até um ponto muito próximo da própria órbita ao longo do eixo maior da mesma.

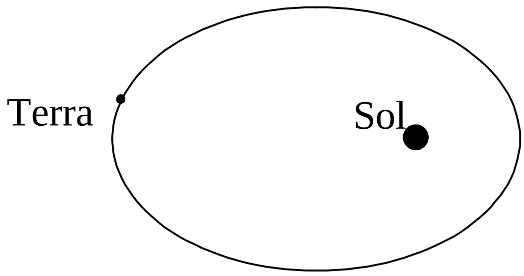

Fig. 1. Figura usualmente encontrada em livros didáticos para ilustrar a órbita da Terra.

A forma das órbitas dos planetas foi um problema resolvido por Johann Kepler (1571 – 1630), o qual utilizou os dados observacionais de melhor precisão que existiam na época (pré-telescópica) e que foram obtidos pelo astrônomo dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601), que vivia em Praga. Estes dados observacionais de alta precisão foram fundamentais para Kepler descobrir que as órbitas eram elípticas e não circulares como até então se acreditava, pois elas são elipses de baixíssima excentricidade, ou seja, são quase circulares.

Os aspectos históricos das descobertas das leis de Kepler estão descritos nos excelentes artigos "Entrevista com Tycho Brahe" e "Entrevista com Kepler", de Medeiros (2001 e 2002 respectivamente) publicados neste mesmo periódico, bem como nas referências daqueles artigos.

Sendo a força que rege o movimento dos corpos celestes uma força central, ou seja, ela é proporcional ao produto das massas dos corpos e inversamente proporcional ao quadrado da distância que os separam, podemos demonstrar que as órbitas de planetas, cometas, satélites, estrelas, galáxias, etc, movendo-se sob ação da força gravitacional somente podem ter trajetórias elípticas, parabólicas ou hiperbólicas. No caso dos planetas elas são todas elípticas e podemos determinar precisamente a excentricidade delas, mas não sabemos explicar as origens desta baixa excentricidade, exceto que estão relacionadas com as origens do sistema solar. A dedução das equações das trajetórias dos corpos celestes pode ser encontrada em qualquer livro de mecânica, tais como, por exemplo, Lucie (1979), Landau e Lifshitz (1978) ou Symon (1977).

Não temos aqui o objetivo de analisar os erros de nenhum livro didático em particular, pois isto já foi feito em várias publicações, como por exemplo em Trevisan, Lattari e Canalle (1997), Canalle, Trevisan e Lattari (1997), Canalle 1998ab, Bizzo (1996).

Certamente o desenho representado pela Fig. 1 é útil didaticamente quando queremos explicar a Lei das Áreas ou a Lei dos Períodos e até mesmo a Lei das Órbitas de Kepler, contudo, uma informação completamente errada acaba sendo transmitida involuntariamente por professores e autores de livros didáticos. Ou seja, de que a órbita da Terra, por exemplo, tem realmente este formato. Este é um erro grave, pois leva alguns professores e muitos alunos à automática conclusão de que o verão ocorre justamente quando a Terra passa mais próxima do Sol. Interessantes trabalhos já foram escritos sobre este erro conceitual, veja por exemplo, Caniato (1983).

Na tentativa de esclarecer o erro que involuntariamente livros e professores transmitem ao desenharem as órbitas dos planetas tal qual indica a Fig. 1, os organizadores da IV Olimpíada Brasileira de Astronomia (IV OBA) introduziram a questão 5, na prova nível I (1ª à 4ª série) e a mesma questão, mas de número 7, na prova de nível II (5ª à 8ª série), da IV OBA, realizada em 2001 (Canalle et al 2002). Abaixo reproduzimos a referida questão, sendo que na Fig. 2, o desenho da esquerda, preenchido de cinza e com o ponto preto quase no centro dele já representa a resposta dada no gabarito da respectiva questão (As provas e gabaritos de todas as OBAs podem ser obtidas em http://www.oba.org.br).

Questão *Você sabe que toda vez que faz aniversário é porque se passou mais um ano para você, certo? Isto significa que o planeta Terra deu mais uma volta ao redor do Sol desde o seu último aniversário. Muito bem, esperamos que você já tenha estudado a forma do movimento da Terra ao redor do Sol. Uma das figuras abaixo é a que melhor representa o movimento da Terra ao redor do Sol.*

a) *Pinte (de qualquer cor) a figura que na sua opinião melhor representa o movimento da Terra ao redor do Sol.*
b) *Na figura que você escolher no item (a) desenhe o Sol (basta fazer um ponto) no lugar que melhor representa o lugar que ele deve ocupar.*

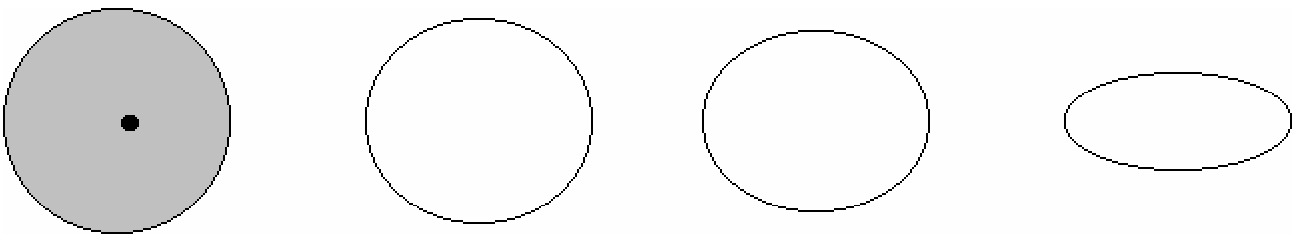

Fig. 2. Elipses usadas na questão 5, na prova nível I (1ª à 4ª série) e a mesma questão, mas de número 7, na prova de nível II (5ª à 8ª série), da IV OBA

Observação: Não existe nenhum efeito de perspectiva nas figuras. Outra coisa: infelizmente existem muitos livros que ilustram de forma errada o movimento da Terra ao redor do Sol. Esperamos que você não tenha estudado num livro com esse problema.

Participaram da IV OBA 46.554 alunos sendo que 16.002 pertenciam ao nível I (1ª à 4ª série) e 24.832 pertenciam ao nível II (5ª à 8ª série do ensino fundamental) e portanto todos eles tiveram a questão 5 (ou 7) acima transcrita diante deles. A Comissão Organizadora Nacional da IV OBA não recebeu fisicamente todas estas provas e sim apenas as 10 melhores provas de cada nível, de cada escola. Isto já representa um número estatisticamente bem significativo. Constatamos que quase 100% dos alunos concentraram suas respostas nas duas últimas elipses da direita da Fig. 2, ou seja, justamente as duas mais excêntricas. Além desta concentração de respostas errôneas nas duas elipses mais excêntricas, nos chamou a atenção o grande número de e-mails e telefonemas de professores contestando a afirmação da nossa resposta de que a figura que melhor representava a órbita de Terra ao redor do Sol seria a primeira da esquerda para a direita da Fig. 2. Diante deste quadro de evidente arraigado erro conceitual sobre a real forma da órbita da Terra e da órbita dos outros planetas resolvemos escrever este trabalho, o qual contém a resposta ampliada que tivemos que dar aos professores participantes da IV OBA e outras informações complementares, tal como por exemplo, como fazer para desenhar, com a excentricidade desejada, uma elipse usando um simples barbante, ou simplesmente a mão livre, ou um editor de texto tipo Word, a visualização de elipses de diferentes excentricidades, a excentricidade das órbitas de todos os planetas e como determinar a excentricidade de elipses já desenhadas medindo o comprimento do seu eixo maior e eixo menor.

2. Visualizando as elipses e suas respectivas excentricidades.

Não pretendemos aqui fazer um detalhado estudo sobre a elipse, pois isto está feito em qualquer livro de geometria, como por exemplo em Iezzi e Dolce (1972). Vamos a seguir definir a elipse e depois visualizar a forma dela em função de sua excentricidade, para que, sabendo a excentricidade da órbita de um planeta ou cometa, seja possível, rapidamente, visualizar a forma correta da sua órbita.

Dados dois pontos quaisquer, de um mesmo plano, chamados de focos e representados por F_1 e F_2, separados pela distância F, a elipse é o conjunto dos pontos P tal que a soma da distância de P até F_1 (representemos por PF_1) mais a distância de P até F_2 (representemos por PF_2) é uma constante, que chamaremos de A, a qual nada mais é do que o comprimento do eixo maior da elipse. A perpendicular ao eixo maior, passando pelo centro da elipse, é o eixo menor da mesma e representaremos seu comprimento por B. Na Fig. 3 representamos estas definições. Matematicamente temos, das definições acima que: $PF_1 + PF_2 = A$.

Porém, o parâmetro mais usado quando queremos expressar a forma de uma elipse é a sua excentricidade ("achatamento") a qual é definida pela razão entre F (distância entre os focos) e A (comprimento do eixo maior) e chamamos esta razão de "*e*" , algebricamente ela é dada por:

$$e = \frac{F}{A} \tag{1}$$

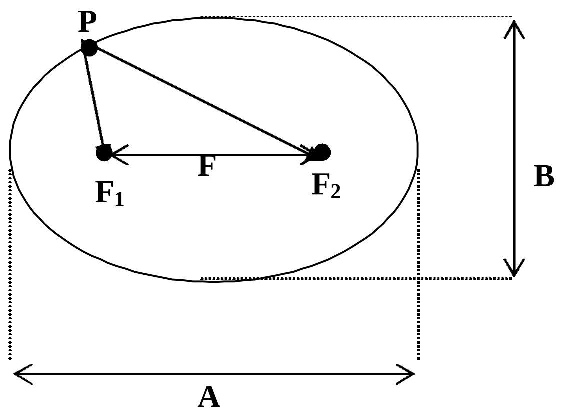

Fig. 3 Representação de uma elipse com os focos F_1 e F_2 e seus eixo maior A e eixo menor B.

A excentricidade de uma elipse é dada, portanto, por um número que varia entre 0 e 1, ou seja, $0 \le e \le 1$. A excentricidade será zero quando F_1 e F_2 forem coincidentes, ou seja, a distância F será igual a zero, e eles estarão exatamente no centro da elipse e esta será chamada, neste caso particular, de círculo. No outro extremo, quando a distância entre F_1 e F_2 aumentar a tal ponto de se aproximar do comprimento do eixo maior, A, da elipse teremos a excentricidade se aproximando de 1 e a elipse será quase tão achatada quanto uma reta.

Note que a excentricidade define a forma da elipse. O tamanho da elipse depende de quão grande ou pequena queremos desenhar a elipse. Ou seja, se precisarmos desenhar uma elipse de excentricidade qualquer, precisaremos escolher, **arbitrariamente,** o tamanho da elipse, ou seja, o comprimento do eixo maior A.

Para termos uma idéia da forma da elipse em função da excentricidade, vamos desenhar 14 elipses com as excentricidades dadas na Tabela 1. Como normalmente queremos representar o Sol nestas elipses, o qual ocupa um dos focos, vamos indicar também a distância entre o centro da elipse e a posição de um dos focos da elipse e vamos representá-la por f[1].

e	0,000	0,100	0,200	0,300	0,400	0,500	0,600	0,700	0,800	0,900	0,950	0,980	0,990	0,999
f (cm)	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	1,90	1,96	1,98	1,99

Tabela 1. Na primeira linha são dados os valores de 14 diferentes excentricidades e na segunda linha as respectivas distâncias do centro da elipse a um dos seus focos.

[1] Da equação (1) obtemos: $f = eA/2$

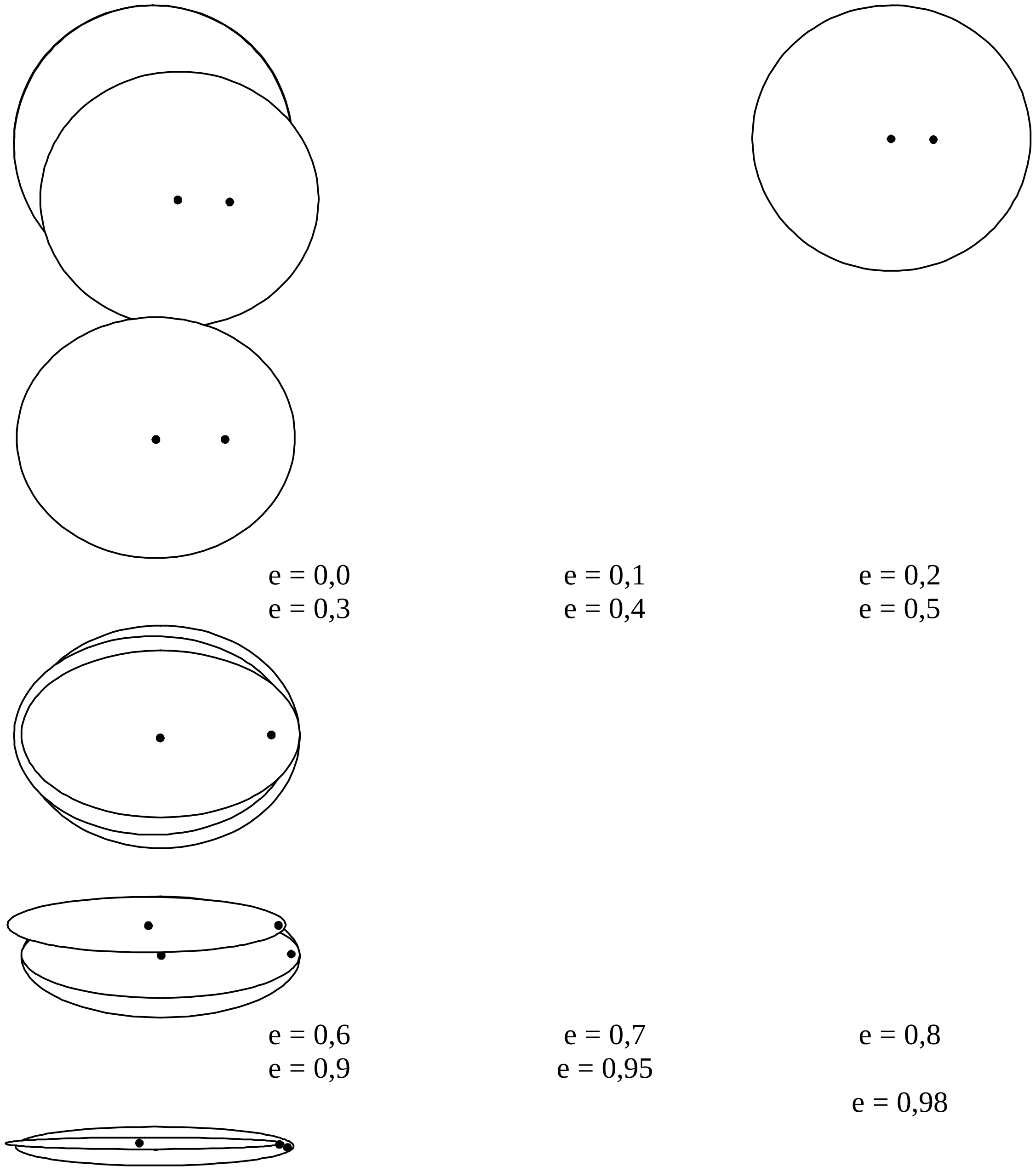

Fig. 4 Desenho em escala correta de 14 elipses com as excentricidades dadas na Tabela 1. A distância entre o foco (ponto à direita dentro das elipses) e o centro delas (ponto no centro das elipses) cresce com o aumento da excentricidade. A distância entre o centro e o foco é data por f e está relacionada na Tabela 1.

Na Fig. 4 todas as elipses têm o mesmo comprimento para o seu eixo maior, o qual escolhemos arbitrariamente como sendo igual a 4,0 cm. A excentricidade de cada elipse está abaixo de cada uma delas.

A figura com e = 0,0 é uma elipse particular que chamamos de círculo, pois não tem nenhum achatamento, mas também é imperceptível qualquer achatamento para a figura com e = 0,1 e também é quase imperceptível qualquer achatamento para as figuras com e = 0,2 e com e = 0,3.

3. A excentricidade das órbitas dos planetas.

Os valores das excentricidades das órbitas dos planetas estão na Tabela 2. Note que a maior excentricidade é a da órbita do planeta Plutão cujo valor é e = 0,25.

Planeta	Mercúrio	Vênus	Terra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Netuno	Plutão
e	0,2	0,07	0,02	0,09	0,05	0,06	0,05	0,009	0,25
f(mm)	4,0	1,4	0,4	1,8	1,0	1,2	1,0	0,2	5,0

Tabela 2. Na segunda linha estão as excentricidades das órbitas dos planetas; na terceira linha está a distância (f (mm)) do centro da elipse de eixo maior igual a 4,0 cm até o seu foco.

A Fig. 5 mostra as elipses que representam as órbitas dos 9 planetas do sistema solar. Elas foram calculadas usando os dados da Tabela 2. Observe que todas as elipses da Fig. 5 possuem eixo maior igual a 4 cm, o qual foi escolhido arbitrariamente por nós. O ponto central em cada elipse representa o centro da elipse e o ponto à direita dele é um dos focos f da elipse o qual é ocupado pelo Sol. A distância entre o centro e foco está dada na Tabela 2 e foi calculada usando a relação f = eA/2.

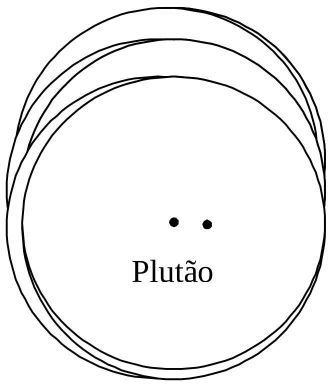

Fig. 5. Elipses das órbitas dos 9 planetas desenhadas com eixo maior de 4 cm. O ponto central é o centro da elipse e o ponto da direita é a posição de um dos focos o qual é ocupado pelo Sol.

4. Evidências observacionais da baixa excentricidade da órbita da Terra.

Uma evidência de que a órbita da Terra não é tão achatada (excêntrica) quanto aparece nos livros didáticos é o fato de vermos o Sol sempre com o mesmo tamanho. Se a órbita da Terra fosse tão excêntrica, quanto, por exemplo, e = 0,8 ou e = 0,9, teríamos que ver o tamanho aparente do Sol mudar ao longo do ano. Quando próximo dele deveríamos vê-lo enorme (e morreríamos de calor) e quando distante dele o veríamos pequeno e morreríamos congelados (os dois hemisférios da Terra simultaneamente). Alem disso, quando próximo teríamos marés enormes e quando distante teríamos somente as marés devido à atração gravitacional da Lua. As figuras com e = 0,5 até e = 0,99 representam órbitas típicas de cometas periódicos.

5. Desenhando elipses com a forma correta.

Quando precisamos desenhar círculos usamos um simples compasso. Apesar de existir o elipsógrafo para se desenhar elipses, ele não é comum ou barato, por isso apresentamos abaixo três métodos para se desenhar elipses com a forma correta.

Vamos apresentar nesta seção três métodos para desenhar elipses. O primeiro é conhecido como método do jardineiro e apesar de conhecido, geralmente falta à sua descrição os detalhes que daremos abaixo para que seja possível construir elipses com determinadas excentricidades. Para o segundo método usamos uma régua e “mão livre”, no qual temos uma elipse bem esboçada com a excentricidade desejada. No terceiro método usamos as ferramentas do editor de texto “Word” (mas o mesmo procedimento pode ser válido para editores similares ao Word).

5.1 Método do jardineiro

Inicialmente apresentaremos os procedimentos para desenharmos uma elipse com uma excentricidade, por exemplo de e = 0,2, usando o método do jardineiro. Note que a excentricidade e = 0,2 corresponde exatamente à excentricidade da órbita do planeta Mercúrio.
1º) Escolher o tamanho do eixo maior (A) da elipse, e isso é arbitrário, então vamos escolher A = 20,0 cm.
2º) Determinar a distância entre os focos, ou seja, a distância F. Mas conhecida a excentricidade “e” e escolhido o comprimento do eixo maior “A”, obtemos a distância entre os focos F usando a Eq. (1), ou seja:

$$F = e.A \qquad (2)$$

Para os valores usados neste exemplo, e = 0,2 e A = 20,0 cm, temos que F = 4,0 cm
3º) Descobrir qual é o comprimento “L” do barbante a ser usado para desenhar a elipse. Esse comprimento é dado pela soma de F mais A, ou seja:

$$L = F + A \qquad (3)$$

4º) Em nosso exemplo, A = 20,0 cm e F = 4,0 cm, logo L = 24,0 cm, assim sendo, é só cortar um pedaço de barbante com pouco mais de 24,0 cm, por exemplo, 28,0 cm, para que quando amarradas as pontas tenhamos na laçada os exatos 24,0 cm.

5º) Em seguida é só abrir um compasso com a separação F (ou fincar dois pregos separados pela distância F), envolver as pontas do compasso com o barbante do item 4 acima e, com um lápis sempre na vertical, e o barbante sempre esticado, traçar a elipse, como ilustra a Fig. 6.

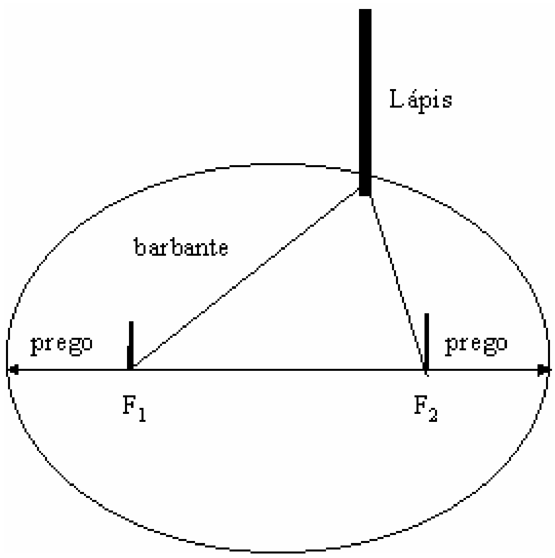

Fig. 6. Esquema do método do jardineiro para desenhar uma elipse

5.2 Método da mão livre

Neste método, em não se dispondo de barbante, pregos ou compasso, ainda assim podemos fazer uma boa representação de uma elipse com uma determinada excentricidade. Vamos desenhar uma elipse com excentricidade e = 0,8, e com eixo maior arbitrariamente escolhido como sendo A = 5,0 cm. Neste método, tudo o que precisamos fazer em seguida é calcular o comprimento do eixo menor, B, o qual, demonstra-se facilmente, que é dado por

$$B = A\sqrt{1-e^2} \tag{4}$$

e traçar os dois eixos da elipse, perpendiculares entre si passando pelo centro da mesma. Usando e = 0,8 e A = 5,0 cm, temos, usando a Eq. (4), B = 3,0 cm. O passo seguinte é desenhar "à mão livre" a elipse contendo os eixos assim calculados e desenhados (veja a Fig. 7).

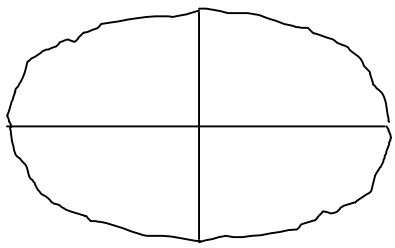

Fig. 7. Elipse desenhada à mão livre a partir do eixo maior A = 5,0 cm e eixo menor B = 3,0 cm para que tenha uma excentricidade e = 0,8 cm.

5.3 Método usando o editor de texto "Word"

Outra ferramenta simples de ser usada, com resultados perfeitos, é o editor de texto Word (ou similares). Usando o menu Inserir/Figuras/Auto formas/Formas básicas basta clicar sobre a figura da elipse do menu disponível e depois clicar sobre a folha do documento word e arrastar o cursor para desenhar uma elipse qualquer. Em seguida clique com o botão direito do mouse sobre a elipse assim desenhada para abrir outro menu e nele clique a opção "Formatar auto forma". Neste novo menu clique na aba "Tamanho" e insira no retângulo "Altura" o comprimento do eixo menor da elipse, conforme obtido pela Eq. (4) e insira no retângulo "Largura" o comprimento do eixo maior da elipse, o qual, como já escrevemos é escolhido arbitrariamente. O resultado é uma elipse perfeita, a qual reproduzimos na Fig. 8. Comparando-se as Figs. 7 e 8 vemos que o método "mão livre" também gerou uma boa aproximação.

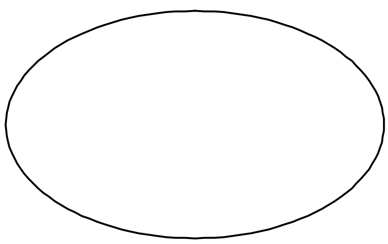

Fig. 8. Elipse desenhada com o editor de texto Word com eixo maior A = 5,0 cm e eixo menor B = 3,0 cm de forma a ter a excentricidade e = 0,8.

6. Determinando a excentricidade de elipses já desenhadas.

Usando as informações do item 5 podemos desenhar elipses com a excentricidade que desejarmos. Porém, usando a Eq. (4), após uma ligeira inversão obtemos a Eq. (5):

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{B}{A}\right)^2} \tag{5}$$

Usando a Eq. (5) podemos determinar a excentricidade de elipses já desenhadas, bastando para isso medir o comprimento do eixo maior A e do eixo menor B. Como exemplo, usando a elipse da Fig. 1, da qual não foi dada a excentricidade, medindo o eixo maior A e o eixo menor B e usando a Eq. (5) obtemos sua excentricidade como sendo e = 0,76.

7. Conclusões

Neste trabalho ilustramos a forma das elipses em função da sua excentricidade, além disso mostramos como desenhá-las na forma correta sabendo-se a excentricidade. Consultando-se a Fig. 4 será sempre possível visualizar a forma da elipse para determinada excentricidade. Por outro lado, se desenhada uma elipse, podemos, simplesmente medindo seus eixos maior e menor e usando a Eq. (5) determinar sua excentricidade. Esperamos que o arraigado erro conceitual de que a órbita da Terra tem formato similar ao da Fig. 8 seja corrigido. Tendo o professor do ensino fundamental ou médio e mesmo aqueles do ensino superior, as técnicas de desenhar elipses com a forma correta em função da excentricidade, possamos não mais propagar involuntariamente o tradicional erro de que a órbita da Terra e dos demais planetas seja tão achatada quanto mostra a Fig. 8.

8. Referências

1. BIZZO, N., Ciência Hoje, **Graves erros de conceitos em livros didáticos de ciência,** v. 121 (21), p. 26 – 35, 1996

2. CANALLE, J.B.G., TREVISAN, R.H., e LATTARI, C.J.B., **Análise do conteúdo de astronomia de livros de geografia de 1º grau**, Caderno Catarinense de Ensino de Física, v. 14 (3), p. 254 – 264, 1997.

3. CANALLE, J.B.G., **O livro didático de geografia e seu conteúdo de astronomia**, Revista Geouerj, v. 4, p. 73 – 81, 1998a.

4. CANALLE, J.B.G., **Técnicas de análise de livros didáticos do 1º grau e dos seus conteúdos de astronomia** Boletim da Sociedade Astronômica Brasileira, v. 17(3), p. 37 – 41, 1998b

5. CANALLE, J.B.G., DA SILVA, A.R., DE MEDEIROS, J.R., LAVOURAS, D.F., DOTTORI, H.A., MARTINS, R.V., **Resultados da IV Olimpíada Brasileira de Astronomia – IV OBA,** Boletim da Sociedade Astronômica Brasileira, v. 21(3), p. 59 – 67, 2002.

6. CANIATO, R., **Ato de fé ou conquista do conhecimento. Um episódio na vida de Joãozinho da Maré**, Boletim da Sociedade Astronômica Brasileira, ano 6, nº 2, abril / junho, , p. 31 - 37, 1983 ou http://www2.uerj.br/~oba/cursos/astronomia/atodefeouconquista.htm.

7. IEZZI, G. e DOLCE, O, em **Geometria Analítica**, Editora Moderna Ltda, 1972, p.179

8. LANDAU, L.D. e LIFSHITZ, E.M., em **Física Teórica, Vol. 1 – Mecânica**, Editora Mir, 1978

9. LUCIE, P., em **Física Básica, Vol. 1 – Mecânica**, Editora Campus Ltda, 1979.

10. MEDEIROS, A., **Entrevista com Tycho Brahe**, Física na Escola, v. 2, nº 2, p. 19 - 30, 2001.

11. MEDEIROS, A., **Entrevista com Kepler: Do seu nascimento à descoberta das duas primeiras leis**, Física na Escola, v. 3, nº 2, p. 20 - 33, 2002.

12. SYMON, K.R., em **Mecânica**, Editora Aguilar, Coleccion Ciência y Tecnica, Edição Espanhola, 1977

13. TREVISAN, R.H., LATTARI, C.J.B. e CANALLE, J.B.G., **Assessoria na avaliação do conteúdo de astronomia dos livros de ciências do primeiro grau,** Caderno Catarinense de Ensino de Física, v. 14 (1), p. 7 - 16, 1997.