COLEÇÃO EXPLORANDO O ENSINO

MATÉMATICA

VOLUME 17

ENSINO FUNDAMENTAL

COLEÇÃO EXPLORANDO O ENSINO

Vol. 1 – Matemática
Vol. 2 – Matemática
Vol. 3 – Matemática
Vol. 4 – Química
Vol. 5 – Química
Vol. 6 – Biologia
Vol. 7 – Física
Vol. 8 – Geografia
Vol. 9 – Antártica
Vol. 10 – O Brasil e o Meio Ambiente Antártico
Vol. 11 – Astronomia
Vol. 12 – Astronáutica
Vol. 13 – Mudanças Climáticas
Vol. 14 – Filosofia
Vol. 15 – Sociologia
Vol. 16 – Espanhol

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Centro de Informação e Biblioteca em Educação (CIBEC)

Matemática : Ensino Fundamental / Coordenação João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho . - Brasília : Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010.
248 p. : il. (Coleção Explorando o Ensino ; v. 17)

ISBN 978-85-7783-041-1

1. Matemática. 2. Ensino Fundamental. I. Carvalho, João Bosco Pitombeira Fernandes de.(Coord.) II. Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. III. Série.

CDU 373.3:51

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA

MATEMÁTICA

Ensino Fundamental

Brasília
2010

Secretaria de Educação Básica

Diretoria de Políticas de Formação, Materiais Didáticos e de Tecnologias para Educação Básica

Coordenação-Geral de Materiais Didáticos

Equipe Técnico-pedagógica
Andréa Kluge Pereira
Cecília Correia Lima
Elizangela Carvalho dos Santos
Jane Cristina da Silva
José Ricardo Albernás Lima
Lucineide Bezerra Dantas
Lunalva da Conceição Gomes
Maria Marismene Gonzaga

Equipe de Apoio Administrativo
Gabriela Brito de Araújo
Gislenilson Silva de Matos
Neiliane Caixeta Guimarães
Paulo Roberto Gonçalves da Cunha

Coordenação da obra
João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho (UFRJ)

Autores
Adriano Pedrosa de Almeida (UFPE)
Gilda Lisbôa Guimarães (UFPE)
João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho (UFRJ)
Mônica Cerbella Freire Mandarino (UNIRIO)
Paula Moreira Baltar Bellemain (UFPE)
Paulo Figuiredo Lima (UFPE)
Verônica Gitirana (UFPE)

Leitores Críticos
Abraão Juvencio de Araújo (UFPE)
Flavia Renata Franco Lopes Coelho (Col. São Bento-RJ)

Ilustradora
Érika Lourenço de Menezes

Preparação de texto
Elvira Nadai

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO – UNIFESP
Instituição responsável pelo processo de elaboração dos volumes

1) As opiniões, indicações e referências são de responsabilidade dos autores cujos textos foram publicados neste volume.
2) Em todas as citações foi mantida a ortografia das edições consultadas.

Tiragem 156.772 exemplares
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA
Esplanada dos Ministérios, Bloco L, Sala 500
CEP: 70047-900
Tel: (61) 2022 8419

Sumário

Apresentação

A Coleção Explorando o Ensino tem por objetivo apoiar o trabalho do professor em sala de aula, oferecendo-lhe um material científico-pedagógico que contemple a fundamentação teórica e metodológica e proponha reflexões nas áreas de conhecimento das etapas de ensino da educação básica e, ainda, sugerir novas formas de abordar o conhecimento em sala de aula, contribuindo para a formação continuada e permanente do professor.

Planejada em 2004, no âmbito da Secretaria de Educação Básica do Ministério da Educação, a Coleção foi direcionada aos professores dos anos finais do ensino fundamental e ensino médio e encaminhada às escolas públicas municipais, estaduais, federais e do Distrito Federal e às Secretarias de Estado da Educação. Entre 2004 e 2006 foram encaminhados volumes de Matemática, Química, Biologia, Física e Geografia: O Mar no Espaço Geográfico Brasileiro. Em 2009, foram cinco volumes – Antártica, O Brasil e o Meio Ambiente Antártico, Astronomia, Astronáutica e Mudanças Climáticas.

Agora, essa Coleção tem novo direcionamento. Sua abrangência foi ampliada para toda a educação básica, privilegiando os professores dos anos iniciais do ensino fundamental com seis volumes – Língua Portuguesa, Literatura, Matemática, Ciências, Geografia e História – além da sequência ao atendimento a professores do Ensino Médio, com os volumes de Sociologia, Filosofia e Espanhol. Em cada volume, os autores tiveram a liberdade de apresentar a linha de pesquisa que vêm desenvolvendo, colocando seus comentários e opiniões.

A expectativa do Ministério da Educação é a de que a Coleção Explorando o Ensino seja um instrumento de apoio ao professor, contribuindo para seu processo de formação, de modo a auxiliar na reflexão coletiva do processo pedagógico da escola, na apreensão das relações entre o campo do conhecimento específico e a proposta pedagógica; no diálogo com os programas do livro Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e Programa Nacional Biblioteca da Escola (PNBE), com a legislação educacional, com os programas voltados para o currículo e formação de professores; e na apropriação de informações, conhecimentos e conceitos que possam ser compartilhados com os alunos.

Ministério da Educação

Introdução

*João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho**
*Adriano Pedrosa de Almeida***

Esta obra tem por objetivo auxiliar o professor a tirar melhor proveito dos livros didáticos de Matemática destinados aos primeiros anos do Ensino Fundamental.

Nossa intenção é múltipla. Propomo-nos comentar várias características didático-pedagógicas ou relativas aos conteúdos de Matemática desses livros. Também desejamos sugerir maneiras de suprir lacunas deixadas por eles e chamar a sua atenção, colega professor, para diferentes encaminhamentos possíveis de certos temas. Estes aspectos completam-se, visto que tais sugestões ou comentários abordam tópicos em que são frequentes dificuldades, seja nos livros didáticos, seja no ensino.

Você não tem em mãos um tratado teórico de metodologia ou de didática da Matemática e, também, não está diante de um curso condensado de Matemática para professores do Ensino Fundamental.

* Ph. D. em Matemática. Professor visitante do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRJ.
** Mestre em Ciência da Computação, Professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco.

Desejamos iniciar aqui uma conversa informal, na qual pretendemos expor pontos de vista, frutos de nossa experiência como professores de Matemática, em diferentes níveis de ensino, de nossos trabalhos e pesquisas em Educação Matemática, além de nossa participação, em várias instâncias, nas avaliações de livros didáticos de Matemática promovidas pelo MEC, desde 1997, no âmbito do Programa Nacional do Livro Didático – PNLD.

O exame de grande número de obras de Matemática, ao longo de vários anos, nos permitiu identificar as suas características, seus pontos positivos e negativos, as diferentes abordagens dadas aos conteúdos, as opções metodológicas feitas pelos autores e as concepções de Matemática e de ensino e aprendizagem presentes nas obras.

Os diversos autores deste livro partilham as mesmas concepções e ideias sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática. No entanto, cada um deles tem maneiras próprias de se expressar por escrito. Essas variações de estilo podem ser percebidas na exposição dos vários capítulos. Esperamos, porém, que não prejudiquem a sua unidade temática e conceitual.

Este livro está dividido em duas partes. Você pode observar que a primeira delas trata de questões especificamente metodológicas, enquanto que a segunda discute, principalmente, aspectos dos conteúdos matemáticos dos primeiros anos do Ensino Fundamental, embora também esteja diretamente voltada à atuação do professor em sala de aula. Evidentemente, não há como fazer uma separação rígida entre estas duas abordagens.

O primeiro capítulo oferece sugestões de uso do livro didático de Matemática, esse valioso auxiliar do professor em suas atividades pedagógicas. Há vários estudos que mostram a influência positiva do livro didático de Matemática no processo de ensino e aprendizagem, especialmente quando suas várias funções são bem exploradas.

O segundo capítulo trata de assunto extremamente importante, que são as metodologias adotadas em livros didáticos de Matemática. Nele, são discutidas as características das várias abordagens metodológicas encontradas nas coleções de Matemática para os primeiros anos do Ensino Fundamental; abordam-se maneiras de o professor tirar proveito de seus aspectos positivos e de como ele pode ajustar o uso do livro às suas concepções sobre o ensino e aprendizagem da Matemática.

O terceiro capítulo é dedicado ao manual do professor. Na concepção dos autores deste livro, a parte mais substancial de uma coleção deveria ser o manual do professor. O livro do aluno, por seu lado, teria de ser conciso, concentrar-se em conceitos e procedimentos importantes e conter algumas atividades. Assim, seriam evitadas as obras volumosas que, algumas vezes, chegam a ter centenas de páginas. O excesso de detalhamento de atividades, contextualizações, apresentação de conceitos e procedimentos, acaba tolhendo a liberdade do professor para estruturar o trabalho de acordo com o que ele conhece de seus alunos e com suas concepções de Matemática e de ensino e aprendizagem.

No quarto capítulo, são discutidos os temas da contextualização dos conhecimentos e da formação para a cidadania. É inegável a relevância da contextualização na apresentação dos conceitos e procedimentos matemáticos. Entre os aspectos abordados, discute-se, por exemplo, que estas contextualizações não precisam envolver apenas atividades do dia a dia dos alunos. Conforme o tópico tratado, pode fazer mais sentido buscar uma contextualização histórica ou matemática ou, ainda, lançar mão de temas relacionados à saúde, meio ambiente, problemas sociais ou econômicos, entre outros. O importante é que elas não sejam artificiais ou forçadas e que procurem mostrar as contribuições que a Matemática pode trazer para a compreensão de várias situações. Além disso, é extremamente importante escolher contextualizações adequadas à idade do aluno.

A par de transmitir às novas gerações o conhecimento acumulado pela sociedade, a escola tem papel de destaque na preparação do aluno para a participação plena em uma sociedade complexa, que queremos regida pelos preceitos éticos e legais de igualdade de direitos, oportunidades e deveres. O livro didático de Matemática e o professor, em seu fazer cotidiano, não podem descuidar disso. Assim, devemos não só respeitar os textos legais relevantes, mas também levar em conta a diversidade étnica, social e econômica da sociedade e ressaltar as contribuições da mulher, dos negros e dos índios para a formação da sociedade brasileira.

O capítulo que finaliza a primeira parte do presente trabalho reflete sobre as contribuições dadas pelos livros paradidáticos ao ensino e aprendizagem. Essas obras, com certeza, não substituem o livro didático, mas podem explorar o lúdico, o poético e o imaginário como auxiliares para a aprendizagem da linguagem e conceitos básicos da Matemática.

A segunda parte deste livro volta-se para os conteúdos desenvolvidos nas aulas de Matemática dos primeiros anos do Ensino Fundamental. Como já dissemos, não temos aqui a pretensão de oferecer um curso intensivo de Matemática para professores do Ensino Fundamental. O que fazemos é refletir sobre maneiras como vários conceitos e procedimentos podem ser trabalhados em sala de aula e quais os cuidados a ter no encaminhamento de alguns tópicos, especialmente aqueles em que, mais frequentemente, o professor encontra dificuldades para trabalhar com os alunos. Ao destacá-los, buscamos esclarecer dúvidas e apresentar abordagens alternativas, que facilitem a tarefa do professor.

Os títulos de seus capítulos são autoexplicativos, sendo cada um deles dedicado a um dos grandes campos da matemática escolar.

A aprendizagem dos **números e operações** é um dos principais objetivos do ensino de Matemática nos primeiros anos do Ensino Fundamental. Essa aprendizagem, como se discute no capítulo correspondente ao tema, deve progredir de atividades bem concretas para, gradativamente, chegar ao conceito de número. A contextualização do conhecimento e o uso de materiais de manipulação são essenciais para a construção do conceito de número, nesse momento. Vale salientar que podemos utilizar sucatas ou materiais acessíveis e de fácil construção. Isso é preferível ao uso do material dourado reproduzido nos livros, para recorte.

No capítulo sobre a **geometria**, este campo é apresentado como parte essencial do ensino de Matemática nos primeiros anos do Ensino Fundamental. Assim, professor, você pode entender melhor e explicar aos seus alunos que aprender a conhecer e explorar o espaço que habitamos, ajuda-nos a viver e a nos locomover melhor nele. Estamos tão acostumados com este espaço que não conseguimos perceber como ele é importante para todos nós. Neste capítulo, você também encontra discussões sobre a aplicabilidade da geometria em várias áreas do conhecimento e campos de atividade. Alguns conceitos de geometria incorporados recentemente ao Ensino Fundamental, como as vistas de objetos, são abordados. O objetivo é contribuir para que esses tópicos possam ser trabalhados de maneira mais eficiente na sala de aula e para que venham a ser contornados encaminhamentos falhos que, por vezes, encontramos nas coleções didáticas.

Em **grandezas e medidas**, discute-se a importância dos conteúdos desse campo em nossa prática cotidiana. Também se reafirma que seu ensino não pode ficar limitado à simples aprendizagem das unidades de medida, seus múltiplos e submúltiplos, e às conversões entre as diferentes unidades de medida. Nos anos iniciais da escolaridade, o foco do trabalho com este campo deve ser o de construir os alicerces para o aprofundamento desses conceitos na segunda etapa do Ensino Fundamental, permitindo que as concepções das crianças venham à tona e possam ser trabalhadas.

Professor, você notará que os capítulos sobre geometria e grandezas e medidas contêm, apropriadamente, discussões comuns. Esta opção justifica-se, visto que, entre as grandezas estudadas nessa fase da escolaridade, estão as grandezas geométricas comprimento, área, volume e ângulos.

O **tratamento da informação** é um assunto incluído no Ensino Fundamental recentemente e que, portanto, suscita dúvidas entre os professores, particularmente no trabalho com os conceitos do campo e na escolha das atividades mais adequadas aos alunos nessa faixa etária. Discutem-se vários encaminhamentos falhos, às vezes presentes nos livros didáticos, mostrando-se como podem ser corrigidos.

Ressaltamos, ainda, que a obra não foi concebida como um roteiro do que deve conter um bom livro didático de Matemática, não pretende ditar a maneira como os conteúdos precisam ser abordados e nem estabelecer qual a melhor proposta metodológica a ser escolhida. Seu objetivo maior é ajudar o professor a utilizar melhor a coleção que escolheu e a explorar todas as suas potencialidades. Assim, não se deve pensar que um tópico discutido tem, forçosamente, que constar de um livro didático de Matemática, ou que é preciso abordá-lo como é feito aqui. Entre outras razões, isso poderia acarretar um aumento indesejável do número de páginas das coleções.

Entendemos que é possível interpretar este livro como um manual do professor bastante aumentado, visto que ele discute:

abordagens de conteúdos; inadequações e como remediá-las; sugestões de atividades e alguns conceitos mais complexos, entre outras questões.

Ele não precisa ser lido, em sequência, da primeira à última página. Seus vários capítulos, e mesmo as seções desses capítulos, podem ser consultados independentemente, à medida que você, colega professor, sentir curiosidade sobre determinado assunto ou necessidade de esclarecimentos.
Boa leitura!

Capítulo 1

Escolha e uso do livro didático

*João Bosco Pitombeira de Carvalho**
*Paulo Figueiredo Lima***

Todos sabemos que cabe à escola, e em particular ao professor, a condução do processo de ensino e o acompanhamento da aprendizagem dos alunos. Nessa tarefa complexa, a grande maioria dos educadores atribui ao livro um papel destacado entre os recursos didáticos que podem ser utilizados. O livro didático traz para o processo de ensino e aprendizagem mais um personagem, o seu autor, que passa a dialogar com o professor e com o aluno. Nesse diálogo, o livro é portador de escolhas sobre: o saber a ser estudado – no nosso caso, a Matemática –; os métodos adotados para que os alunos consigam aprendê-lo mais eficazmente; a organização curricular ao longo dos anos de escolaridade.

Estabelece-se, assim, uma teia de relações interligando quatro pólos: um deles é formado pelo autor e o livro didático; o professor, o aluno e a Matemática compõem os outros três:

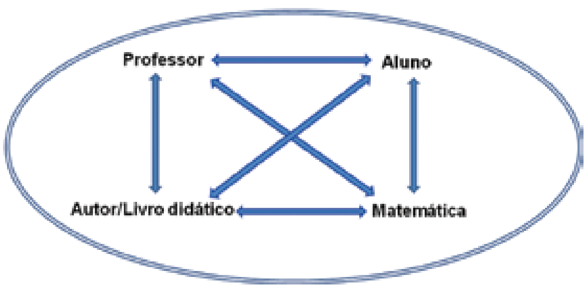


Figura 1

* Ph. D. em Matemática. Professor visitante do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRJ.
** Ph. D. em Matemática. Professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco.

Uma reflexão sobre o livro didático que procure contemplar o cenário complexo esquematizado (Figura 1, página anterior) pode inspirar-se no estudo de Gérard & Roegiers (1998) para extrair um elenco das funções mais importantes desse livro em relação ao aluno e ao professor.

Tratando-se do aluno tais funções podem ser:

- favorecer a aquisição de saberes socialmente relevantes;
- consolidar, ampliar, aprofundar e integrar os conhecimentos;
- propiciar o desenvolvimento de competências e habilidades do aluno, que contribuam para aumentar sua autonomia;
- contribuir para a formação social e cultural e desenvolver a capacidade de convivência e de exercício da cidadania.

Com respeito ao professor:

- auxiliar no planejamento didático-pedagógico anual e na gestão das aulas;
- favorecer a formação didático-pedagógica;
- auxiliar na avaliação da aprendizagem do aluno;
- favorecer a aquisição de saberes profissionais pertinentes, assumindo o papel de texto de referência.

Para o desempenho dessas funções importa não só o que traz o livro do aluno, mas também as orientações e os textos informativos incluídos no manual do professor. No presente capítulo, daremos ênfase aos assuntos relativos ao livro do aluno. As discussões em torno do manual do professor serão apresentadas no capítulo 3, embora muitas das observações que são feitas a seguir se refiram ao papel do professor em face do livro didático.

Observamos, também, que as funções mencionadas sofrem inúmeras influências do contexto escolar. Muitas vezes, por exemplo, o livro é pouco utilizado em sala de aula, apesar de disponível. Desperdiça-se, assim, um recurso didático valioso.

Por outro lado, há situações em que o livro didático tem ocupado o papel dominante no ensino. Nestes casos, convém lembrar que, apesar de toda a sua importância, este livro não deve ser o único suporte do trabalho do professor. É sempre desejável buscar enriquecê-lo com outras fontes, a fim de ampliar ou aprimorar o conteúdo que ele traz e, acima de tudo, adequá-lo ao grupo de alunos que o utiliza. Os livros complementares, selecionados no PNLD 2010, podem ser uma dessas fontes privilegiadas. Nesse esforço, em que o professor é insubstituível, devemos procurar levar em consideração as especificidades sociais e culturais da escola, para que a formação integral do aluno seja mais efetiva.

O Programa Nacional do Livro Didático – PNLD tem como um de seus princípios básicos atribuir ao professor, em sintonia com o projeto pedagógico de sua escola, a tarefa de escolher o livro que será usado por seus alunos. Este é, portanto, um trabalho dos mais significativos que periodicamente o professor é chamado a realizar. Para subsidiá-lo na escolha, é que o PNLD procura enviar para todas as escolas um exemplar do Guia do Livro Didático que descreve, resumidamente, cada coleção, com seus aspectos positivos e negativos.

Mas há outra questão fundamental a desafiar o professor:

Como usar o livro didático para que ele cumpra, da melhor maneira possível, o que se espera dele, levando em conta as funções relacionadas anteriormente? O texto a seguir procura dar subsídios para uma resposta a esta questão.

O livro didático como fonte de saberes socialmente relevantes

Para cumprir esta função, na primeira etapa do Ensino Fundamental, o livro didático deve favorecer a aquisição de conteúdos dos grandes campos da matemática escolar: *números e operações*, *geometria*, *grandezas e medidas* e *tratamento da informação*. Ele deve tratar dos conceitos e procedimentos acumulados nesses campos matemáticos, de geração em geração, e julgados importantes para a bagagem cultural de toda a sociedade.

Boa parte dos livros didáticos aprovados no PNLD 2010, em consonância com as recomendações curriculares atuais, tem procurado abordar os conteúdos matemáticos dos campos acima mencionados com atenção ao seu significado no cotidiano das pessoas e nas diversas práticas sociais. Em particular, o campo do *tratamento da informação* (noções de estatística e de probabilidades), incluído em anos recentes nos currículos, assume cada vez mais um papel importante na formação matemática, em resposta às demandas da sociedade contemporânea. As atividades com a calculadora vão progressivamente chegando às páginas dos livros didáticos e às salas de aula. Por sua vez, o ensino de *geometria* tem sido ampliado para incluir tópicos como localização espacial, representações gráficas de figuras geométricas e o conceito de simetria. O estudo dos *números decimais*, assim como o das *grandezas e medidas*, ganhou mais relevo, em virtude dos seus frequentes usos sociais.

Essas mudanças nos conteúdos a serem estudados na escola devem ser encaradas como positivas. Mas elas implicam a necessidade de adequada formação inicial e continuada dos professores para que eles possam exercer o seu papel de condutores do processo de ensino e aprendizagem. O professor deve buscar aprimorar a sua prática e seus estudos recorrendo às fontes de formação que lhe sejam acessíveis.

Sabemos que essa busca de formação não é tarefa fácil no contexto atual. Em primeiro lugar, porque há um enorme acúmulo de novos conhecimentos que, muitas vezes, nos julgamos incapazes de adquirir. Na verdade, é cada vez mais difícil para os indivíduos reter todos os conhecimentos disponíveis, mesmo os específicos de seu trabalho. Por isso, precisamos desenvolver a capacidade de fazer uma boa seleção das fontes e dos novos conhecimentos nelas obtidos para que eles possam ser incorporados à nossa prática profissional, sem a preocupação de "saber tudo", mas com o cuidado de entender bem os conteúdos que devemos ensinar.

Seleção e distribuição de conteúdos nos livros didáticos: alguns cuidados

Em muitas obras, ainda que estejam presentes os quatro grandes campos da matemática escolar, é dedicada uma atenção excessiva ao campo de *números e operações* em detrimento dos outros campos. Diante disso, o professor pode melhorar a seleção de conteúdos do livro, fazendo cortes ou complementações.

Nessa tarefa complexa, devemos ter dois cuidados. O primeiro é não omitir assuntos essenciais, que poderão fazer falta em etapas posteriores da escolaridade. O segundo é não tornar muito extensa a matéria a ser estudada, com excesso de temas e, pior ainda, apresentados sem distinção dos mais importantes.

Antes de escolher o livro que adotaremos, devemos nos fazer uma pergunta bem simples: o que é que ele contém, efetivamente, de Matemática? Algumas vezes, por exemplo, encontramos um livro que apresenta um trabalho muito bom sobre meio ambiente, mas que só vai abordar a construção dos números do meio para o final da obra, em uma fase em que a aquisição do nosso sistema de numeração é fundamental.

No entanto, isto não significa que esta deva ser a única pergunta a fazer. De fato, é possível que um livro contenha de forma adequada a matemática escolar do Ensino Fundamental e resolvamos não o adotar devido a outras considerações. Por exemplo: podemos discordar de sua proposta metodológica ou concluir que seriam necessárias muito mais horas dedicadas à Matemática para conseguir cobrir, razoavelmente, tudo o que ele contém.

O livro didático e o saber matemático

Consolidação, ampliação, aprofundamento do saber

Nas tendências curriculares atuais, tem sido privilegiada a ideia de um ensino voltado para a construção de competências. Contudo, nessas orientações curriculares também é afirmado que a construção de competências não dispensa a construção de saberes, pois são exatamente tais saberes que estão na base das competências.

Dessa forma, é papel fundamental de um livro didático favorecer a aquisição, pelo aluno, dos conteúdos que compõem a matemática escolar. É desta matemática que o aluno deve se apropriar, não como um repertório de fórmulas e algoritmos, mas como saber-fazer matemático que o habilite a resolver problemas do seu dia a dia ou de sua prática profissional futura.

A Matemática foi construída ao longo da história como instrumento para resolver problemas e, simultaneamente, foi sendo organizada em um corpo de saberes estruturados com apoio no método lógico-dedutivo. Por isso, é preciso assegurar que os conceitos e procedimentos matemáticos estudados na escola estejam em sintonia com o conhecimento aceito como válido pela Matemática. Além disso, no ensino, são inseparáveis as questões puramente matemáticas daquelas que dizem respeito à didática dos conceitos e procedimentos visados. Daí porque, no processo de ensino e aprendizagem, e no livro didático em particular, é preciso enfrentar a difícil tarefa de garantir, ao mesmo tempo, que os conceitos focalizados estejam corretos e sejam trabalhados com uma didática adequada.

A Matemática pode ser entendida como uma fonte de modelos para interpretar os fenômenos naturais e sociais. Esses modelos são elaborações abstratas que se constituem em instrumentos para a compreensão desses fenômenos e para a resolução de questões surgidas quando os estudamos. Um dos grandes méritos dos modelos matemáticos é o de poderem ser aplicados a muitas situações aparentemente diferentes, mas que são estudadas com base em um mesmo modelo.

Modelos matemáticos incluem conceitos, relações entre conceitos, procedimentos e representações simbólicas. No entanto, não devemos nos esquecer que, historicamente e no processo de aprendizagem, tais modelos não surgem prontos e acabados, mas são frutos de longo processo de construção.

Vejamos, por exemplo, as situações seguintes:

- Manoel tem 5 bolas de gude numa caixa e 7 bolas noutra caixa. Quantas tem ao todo?
- Maria tinha 13 pontos num jogo e ganhou mais 14 pontos. Com quantos ficou?
- Pedrinho já caminhou hoje 6km, quanto mais precisa caminhar para ter percorrido, ao fim do dia, um total de 10km?
- D. Cristina saiu de casa com R$ 70,00 na carteira. Gastou R$ 35,00 no supermercado e R$ 17,00 na feira livre. Quanto restou na sua carteira?
- Na segunda-feira, José colocou R$ 200,00 na sua conta no banco. Na sexta-feira, precisou tirar R$ 60,00 do banco e, por isso, ficou devendo R$ 50,00. Quanto José devia na segunda-feira?

As situações mencionadas possuem várias diferenças de contexto e de estrutura cognitiva. Os estudos têm mostrado que adquirir a competência de resolver problemas análogos a esses pode se prolongar desde os primeiros anos até, possivelmente, o 8º ano do Ensino Fundamental. Nesse longo período, o aluno deverá ir consolidando, ampliando e aprofundando, gradualmente, um único modelo matemático para os problemas do tipo acima, que é o **conjunto dos números inteiros** com suas operações de **adição e de subtração**.

Outra questão de natureza conceitual que requer a atenção do professor diz respeito a diferentes maneiras de ser tratado, mesmo no âmbito da Matemática, um mesmo conteúdo, o que é muito frequente. Um exemplo desse fato ocorre com a classificação de quadriláteros. É frequente ouvirmos a pergunta *"Quadrado é retângulo?"*. Este é um caso em que a resposta correta depende de uma escolha. Se decidirmos, como se faz comumente nos anos iniciais do ensino, definir retângulo como um *quadrilátero que possui quatro ângulos retos e dois lados com comprimentos diferentes*, então, devemos concluir que um quadrado não é um retângulo, pois tal figura geométrica não cumpre a condição estabelecida para os lados. Por outro lado, se optamos por definir retângulo como um *quadrilátero que, simplesmente, possui quatro ângulos retos*, então, devemos deduzir que todo quadrado é um retângulo, pois todo quadrado possui quatro ângulos retos. Convém observar que, na Matemática mais avançada, esta última é a escolha adotada. No entanto, o que é importante, nos anos iniciais da aprendizagem, não é qual escolha fazer, mas manter a coerência com a opção feita ao longo das atividades. Além disso, é sempre bom ter em conta o alerta:

> Mais importante do que memorizar a nomenclatura, é saber utilizar os conceitos e procedimentos para resolver problemas.

A integração dos conhecimentos

Uma das recomendações mais frequentes nas orientações curriculares atuais é que procuremos estabelecer, no ensino, ligações entre os campos da própria Matemática. Por isso, o professor é chamado a trabalhar conteúdos em que haja articulações entre *números e operações; geometria; grandezas e medidas*; e *tratamento da informação*.

Muitos dos livros didáticos, principalmente os mais recentes, expõem, em cada unidade ou capítulo, tópicos de dois ou mais campos da matemática escolar. Nesses casos, é preciso verificar se o autor conseguiu, realmente, integrar os conteúdos de um capítulo ou de uma unidade ou se os campos foram, simplesmente, postos um ao lado do outro, sem interconexões. Às vezes, a única vantagem dessa disposição é garantir que os conteúdos dos campos da matemática escolar possam ser cobertos de maneira paralela, sem que nenhum deles seja relegado ao fim do ano letivo, com o risco de nunca ser estudado – o que acontecia, há algum tempo atrás, com a *geometria*, por exemplo.

A esperada integração não se deve dar somente entre campos, mas em um mesmo campo. Por exemplo, quando se estuda a adição e a subtração como operações inversas, está se integrando o conceito de adição com o de subtração. Mas, atenção! Para fazer isso em sala de aula, você não precisa dizer, em uma primeira abordagem, que a adição e a subtração são operações inversas. Mais do que conhecer esta designação, que talvez só faça afastar o interesse da criança, o importante é que elas saibam utilizar esta relação entre as operações para resolver problemas.

Só o exame cuidadoso da coleção que utilizaremos é que nos pode dar a certeza de que ela promove a integração dos conhecimentos adquiridos.

Além da integração entre os diversos conteúdos da Matemática, devemos verificar se a coleção escolhida relaciona a Matemática a outras áreas do conhecimento. Se ela apresentar, ao longo de seus capítulos ou de suas unidades, projetos interdisciplinares para serem realizados pelos alunos, procure não os dispensar, professor. E lembre-se: os melhores projetos são os planejados para serem realizados em grupos.

Muitas vezes, a pretendida interdisciplinaridade consiste simplesmente em utilizar dados numéricos sobre alguma atividade como pretexto para a construção de gráficos e tabelas. Mas, a partir desses dados, uma vez construído o gráfico, podemos provocar a reflexão dos alunos sobre o tema. Por exemplo, se a coleção apresenta os gastos de uma família com energia elétrica ao longo de um ano, podemos discutir com a turma em que meses esses gastos foram menores, e em que meses foram maiores, e encaminhar o debate para que eles tentem entender o porquê dessas diferenças mensais. Dados sobre o lixo coletado em bairros de perfis socioeconômicos diferentes prestam-se também a muitas reflexões. Pode ser produtivo explorar os conceitos de vistas e de perspectiva em conjunto com o professor de Artes. São, assim, inúmeras as possibilidades para um trabalho interdisciplinar efetivo.

Se você não estiver satisfeito com a maneira como sua coleção integra os conhecimentos, vá à biblioteca da escola, consulte outras coleções, utilize os livros paradidáticos distribuídos pelo MEC para uso em sala de aula. Você pode, naturalmente, recorrer à internet como fonte de informação

No entanto, isso não significa que você deva abandonar a coleção escolhida e não mais usá-la com seus alunos. Não existe livro perfeito. Todos contêm imperfeições ou falhas no encaminhamento dado a certos assuntos. Compete aos colegas professores, que conhecem várias coleções, complementar alguns conteúdos ou modificar determinadas abordagens presentes naquela que foi adotada em sua escola. Afinal, você não precisa ficar dependente do livro, ele é uma ferramenta em nossas mãos.

O livro didático como texto de referência

O livro didático contém tópicos de Matemática para serem ensinados e aprendidos. E quando o aluno precisa rever um conceito, um procedimento, uma atividade, como os encontrar? E se você quer se lembrar como o livro introduziu certo conceito?

Logo que a criança começar a dominar a leitura, comece simultaneamente a habituá-la a usar o livro como referência. Ensine os alunos a localizar tópicos específicos, mostre-lhes qual é a função de um sumário. À medida que avançarem em suas escolaridades, eles usarão mais e mais os livros como referência, e é importante habituá-los a isso desde bem cedo.

Esta é uma tarefa importante, mas, alguns dos livros didáticos atuais não têm contribuído nessa direção. Neles, os sumários não ajudam a localização dos assuntos estudados por omitirem vários deles ou por adotarem títulos genéricos para seus capítulos ou unidades. Certamente, não fica claro qual o conteúdo de um capítulo com um título como *"Um passeio no zoológico"*. O ideal seria que os livros contivessem índices remissivos, que permitissem localizar rapidamente o seu conteúdo. É verdade que nos primeiros anos da escolaridade isso pode parecer complicado para a criança, mas ela tem que começar a trilhar desde cedo o caminho que a levará, no futuro, a utilizar bem os livros individualmente, em grande parte das vezes como referência.

Uma sugestão seria elaborar, com os alunos, durante o ano, um índice remissivo dos conteúdos do livro usado, em um caderno especial, que possa ser consultado por toda a turma, à medida que estes conteúdos forem abordados em sala de aula.

Muitas coleções trazem glossários. Devemos abordá-los com extremo cuidado. Nas últimas avaliações dos livros do PNLD, algumas destas foram excluídas por apresentarem erros grosseiros nos glossários. Em muitas outras, a descrição dos verbetes do glossário, por vezes, não corresponde ao que é focalizado no livro do aluno. Por exemplo, no corpo do livro do aluno, apresenta-se o conceito de ângulo como uma figura formada por **duas semirretas** com o mesmo ponto inicial e, no glossário, 'ângulo' é definido como uma **região** delimitada por semirretas.

Outra falha bastante frequente dos glossários é o fato de não mencionarem em seus verbetes em que página do livro aquele assunto é tratado, o que prejudica muito a sua função de referência.

O livro didático e o desenvolvimento de competências e habilidades

Para a construção das competências com base nos saberes matemáticos, tem sido valorizada, seguidamente, a metodologia de resolução de problemas. Nessa metodologia, tomamos como base a ação do aluno em situações que propiciem o surgimento de ideias matemáticas.

Desde que começou a ser criada, há milhares de anos, a Matemática sempre serviu para resolver problemas. Hoje, esses problemas variam, por exemplo, desde saber calcular quanto custam 500 gramas de pão, sabendo que o quilograma custa R$ 5,50, até o de gerar programas que garantem a segurança de contas bancárias na internet. Os tópicos de Matemática que nós ensinamos, em todos os estágios da escolaridade, têm utilidade para resolver problemas. Mas, para isso, precisamos mais do que conhecer os conteúdos: é necessária toda uma postura perante o problema e a capacidade de mobilizar competências cognitivas de ordem superior, como perceber regularidades, fazer conjecturas baseadas em alguns exemplos, saber testar a validade dessas conjecturas, saber generalizar resultados já conhecidos e verificar se a generalização é válida.

O que é um problema de Matemática? Não é fácil encontrar consenso com respeito à sua definição. Talvez se possa dizer que um problema é:

> Uma situação ainda não conhecida que exige a mobilização de conhecimentos e atitudes para se chegar a uma conclusão sobre ela.

Por exemplo, suponhamos que um aluno está aprendendo a adição e a subtração de números naturais e está familiarizado apenas com questões dos tipos: *Se João tem 5 bolas de gude, e ganha 3, com quantas fica?*; *Pedro tinha 13 bolas e perdeu 4, com quantas ficou?* Para esse aluno constitui-se em genuíno problema propor uma questão do tipo: *Marcos tem 7 bolas, quantas mais ele precisa para ter um total de doze bolas?* Ele pode recorrer à adição e, acrescentando bolas, chegar ao total. No entanto, é possível que descubra que numa única subtração também chegará ao resultado desejado. Gerar oportunidade para o emprego de novas estratégias é uma das características de um bom problema.

Nós, professores, podemos ajudar nossos alunos a desenvolverem uma postura produtiva perante uma questão. E o livro didático, se bem escolhido e utilizado, nos auxiliará nessa tarefa. A primeira coisa a fazer, é verificar se ele contém situações-problema, e não somente simples exercícios de fixação. Em seguida, devemos selecionar cuidadosamente, no livro, uma sequência de situações-problema que:

Não possam ser resolvidas por simples imitação de situações-problema já focalizadas e não sejam demasiadamente difíceis para o aluno, levando-se em conta o conhecimento que ele já adquiriu, a fim de não provocar perda de autoconfiança.

Convém lembrar que um livro que contenha somente exercícios de fixação é prejudicial ao aluno, pois não o prepara para enfrentar situações novas, desafiadoras. Por sua vez, um livro que só apresente problemas difíceis também não contribui adequadamente para a aprendizagem, visto que pode levar o aluno a perder a autoconfiança, particularmente em Matemática, fazendo com que fique imobilizado e acabe por acreditar que não será capaz de resolvê-los.

É tarefa difícil, para nós, professores, atingir o equilíbrio entre problemas novos, desafiadores, cuidadosamente escolhidos no livro didático para não serem demasiadamente difíceis, e exercícios de fixação, que também desempenham um papel estratégico na aprendizagem. A memorização de conceitos e procedimentos é importante, mas deve ser conquistada pela via da compreensão e da sistematização. Diante de uma obra didática em que a fixação e a memorização são privilegiadas, é muito maior o nosso esforço até que consigamos que nossos alunos, realmente, se tornem capazes de passar a usar a Matemática produtivamente. Nessa tarefa, nos ajuda muito o conhecimento de Matemática e de didática, além de nossa experiência, tanto com os alunos de anos anteriores quanto com os que temos à nossa frente. O excesso de atividades propostas, mesmo quando elas são interessantes, é outro fator que pode desestimular o aluno.

Professor, você não precisa trabalhar, em sala de aula, todas as atividades propostas no livro didático, nem seguir a ordem em que elas são apresentadas.

Podemos nos indagar se o ensino centrado no desenvolvimento de competências e o uso da metodologia de resolução de problemas já é uma realidade. Infelizmente, no ensino atual, ainda é dada mais importância à nomenclatura e aos conhecimentos técnicos do que às ideias da Matemática. Além disso, privilegia-se a memorização de procedimentos em detrimento da capacidade de resolução de problemas com o emprego da Matemática. Quando se adota essa postura, não há preocupação em favorecer uma aprendizagem ativa por parte do aluno e não se procura gerar um contexto que o leve a desenvolver a capacidade de perceber regularidades, fazer generalizações, analisar, sintetizar e validar resultados, entre outras.

A competência de reconhecer regularidades, de saber generalizar, é muito importante. Ela propicia os momentos nos quais o aluno "adivinha" a solução. É o momento do *Eureka!*, do *Achei!*. É difícil reconstruir os passos que levaram o aluno até este momento, saber como ele pensou, como selecionou uma alternativa entre várias etc. Não importa, se em um primeiro momento, ele não consegue justificar sua resposta. Com nossa ajuda, será capaz de, aos poucos, mostrar como pensou para chegar até o resultado. É isso o que se chama de metacognição, a capacidade de pensar sobre o próprio pensamento.

A metacognição é a capacidade de pensar, de analisar o próprio pensamento. É uma das características marcantes das pessoas que conseguem resolver, com sucesso, problemas desafiadores. Que tal insistir para que seus alunos sejam capazes de relatar como resolveram um problema?

Nesse sentido, vale a pena desenvolver o trabalho com padrões geométricos ou numéricos. Eles são uma preparação para o pensamento algébrico. Se a coleção que você escolheu não enfatiza esse tópico, sugerimos procurar na biblioteca da escola outras coleções que possam suprir essa lacuna. O cuidado que devemos ter em atividades de descoberta de padrões é o de não limitar as possíveis respostas dos alunos a um só padrão esperado.

É possível apontar outra dificuldade para que o aluno desenvolva sua capacidade de resolver problemas. Há livros didáticos organizados em pequenas seções nas quais determinado conteúdo é introduzido, exercícios sobre esse conteúdo são resolvidos e são propostas atividades nas quais o aluno deve usar o modelo apresentado. Nesses casos, o aluno sabe exatamente qual o conhecimento a ser mobilizado e a atividade é apenas um exercício de fixação. Tais exercícios podem ser úteis, mas não devem ser os únicos a serem propostos aos alunos. Alguns livros didáticos procuram atenuar essa limitação intercalando, ao longo dos seus capítulos, seções com atividades de revisão, que englobam os conteúdos estudados anteriormente e que devem ser valorizadas pelo professor.

Os desafios, jogos e quebra-cabeças, trabalhados na sala de aula, também contribuem para estimular os alunos a se posicionarem. Além disso, é bom deixar claro que não tem importância se as ideias iniciais sobre um problema não forem adequadas para resolvê-lo. É sempre melhor fazer tentativas do que ficar imobilizado. Às vezes, vale mais a pena passar certo tempo tentando solucionar um problema genuíno do que resolver muitos exercícios de fixação, apenas, durante esse tempo.

A avaliação da aprendizagem é tema dos mais complexos e delicados para nós professores. Por isso, vale ressaltar que muitos livros didáticos atuais têm dedicado atenção à autoavaliação do aluno, reconhecendo nela um instrumento relevante para o desenvolvimento de sua autonomia como sujeito que estuda e que aprende. O capítulo sobre o manual do professor trará mais elementos sobre este assunto.

O livro didático e a educação social e cultural do aluno

Muitos livros didáticos de Matemática, atualmente, preocupam-se com a formação integral do aluno, colaborando para torná-lo consciente de seu papel como membro de uma comunidade.

Contribuem para a construção da cidadania aquelas coleções que valorizam a participação efetiva do aluno na sua aprendizagem e incentivam sua autonomia. O estímulo ao trabalho em equipe é outra característica que favorece o desenvolvimento da capacidade de conviver harmonicamente em sociedade e de respeitar as diferenças entre as pessoas.

Não podemos esquecer, também, que auxiliar o aluno a conhecer o contexto social em que vive o ajuda a se formar como um cidadão crítico. Assim, devemos procurar desenvolver competências matemáticas que contribuam mais diretamente para o aluno compreender questões sociais vinculadas à sua comunidade e, progressivamente, à sociedade mais ampla. Por exemplo, os problemas ambientais e as desigualdades sociais e econômicas que enfrentamos podem ser objeto de atividades interessantes no campo do tratamento da informação. Nem sempre, porém, as situações propostas em muitos livros didáticos vêm acompanhadas de atividades que favoreçam uma reflexão sobre a importância da Matemática no contexto.

Entre seus vários papéis, o livro didático também oferece ao aluno a oportunidade de desenvolver as competências de ler e interpretar textos, que são fundamentais em todas as fases da escolarização. Por isso, ele deve ser lido, discutido, compreendido e jamais ser visto apenas como uma fonte a que o professor recorre para retirar atividades, exercícios e problemas a serem propostos aos alunos. Desenvolver a capacidade de leitura de textos é atividade tão relevante que não devemos nos restringir à leitura do livro didático, mas incluir também outros materiais, entre eles, as obras complementares, agora distribuídas pelo MEC, destinadas aos anos iniciais do Ensino Fundamental e os livros da biblioteca da escola.

Lembre-se de que, para muitos alunos, os livros didáticos são as únicas obras que eles têm em suas casas. Se quisermos formar cidadãos que dominem a leitura de textos de vários tipos, é bem oportuno começar essa formação recorrendo-se aos livros didáticos.

Nós, professores, somos atores indispensáveis no ensino e na aprendizagem da Matemática e, entre nossas funções, sobressai a de incentivar o aluno a ler o livro, tanto na sala de aula como em sua casa. A leitura, como uma competência essencial, deve ser estimulada desde o início da escolaridade. Uma boa ideia é informar aos alunos, no fim da aula de Matemática, sobre o que irão estudar no dia seguinte, e pedir que leiam em casa a parte correspondente no livro, a fim de listarem as dúvidas de leitura, que poderão ser sanadas na classe. Encoraje os alunos a tentar fazer as atividades, antecipadamente. Se for possível habituá-los a isso, você perceberá que as aulas serão bem mais produtivas. Além disso, ajudaremos os alunos a dar os primeiros passos em uma estrada que poderão palmilhar pela vida afora: a estrada do aprender com autonomia.

Hoje, com a escolaridade praticamente universalizada nos seus primeiros estágios, o papel da escola na formação de valores e atitudes é cada vez maior. E como um livro didático costuma contribuir para o papel formador da escola em uma sociedade democrático-republicana?

Esta contribuição fica evidente quando a obra menciona o papel importante de brancos, negros, índios e mestiços na formação da sociedade brasileira; incorpora personagens dos vários grupos étnicos e sociais brasileiros, em condições de igualdade; considera com respeito e interesse todas as profissões e atividades sociais ou familiares; encara as diversidades dos tipos de família atualmente existentes e os papéis exercidos pelos seus componentes; leva em conta, nas ilustrações, as várias etnias de nossa sociedade, entre outros aspectos.

É frequente haver livros didáticos nos quais os contextos utilizados fazem mais sentido para as crianças que vivem em um meio socioeconômico mais elevado. Professor, diante de uma obra assim, você pode complementar seu trabalho recorrendo a textos ou a outras fontes que tragam para o processo pedagógico a contribuição específica e indispensável da cultura em que se inserem seus alunos.

A leitura de um livro de Matemática tem suas especificidades. Por exemplo, é bom ler o livro com lápis e papel à mão, a fim de poder efetuar as operações e fazer rabiscos ao longo da leitura.

O livro didático e o professor

Nesta última seção, você encontra breves comentários sobre os papéis do livro didático em relação ao professor, mencionados no início deste capítulo.

Um bom livro didático é uma fonte para o conhecimento da matemática escolar. É nele que podemos nos familiarizar com a Matemática que devemos ensinar. Às vezes, os cursos de formação inicial do professor nessa área se descuidam de um aspecto fundamental: ensinar a matemática elementar com que os docentes irão lidar na sua prática docente na escola. E, assim, alguns professores, sem nenhum demérito, têm que aprender esta matemática no livro que adotam.

Especialmente nesses casos, o livro didático torna-se um auxiliar no planejamento e na gestão das aulas, seja pela explanação de conteúdos curriculares, seja pelas atividades, exercícios e trabalhos propostos. Ele pode regular a sequência dos conteúdos, o ritmo de apresentação de cada um deles e definir, implicitamente, o que é mais importante pela ênfase que dá a cada tópico.

Observamos, também, que os manuais do professor evoluíram positivamente e alguns deles apresentam indicações detalhadas de como trabalhar as atividades do livro do aluno, além de trazerem boas sugestões didático-pedagógicas para o docente. Em particular, eles contribuem com considerações teóricas e práticas para a avaliação da aprendizagem do aluno.

Um livro didático, incluído aí o manual do professor, que cumprir bem os papéis mencionados constitui-se em uma obra de referência de extrema utilidade para o professor, no campo da matemática escolar e do conhecimento didático-pedagógico.

Contudo, não podemos esperar um aprimoramento dos conhecimentos necessários à prática de professor de Matemática, seja no livro do aluno, seja no manual do professor. Para esse fim, devemos buscar outras fontes de estudo e de formação que nos orientem, por exemplo, sobre os porquês mais aprofundados do funcionamento dos algoritmos das operações com números naturais. No campo didático-pedagógico, podemos procurar conhecer as teorias atuais de aprendizagem, que nos permitam compreender melhor as dificuldades de nossos alunos para adquirir o conhecimento que tentamos ensinar a eles.

Para concluir, relembramos ao colega professor que, no cenário complexo da sala de aula, intervêm o aluno, o livro didático, a Matemática e o professor, como fatores essenciais no processo de ensino e de aprendizagem. No entanto, nele, o aluno e o professor são os sujeitos privilegiados, *cabendo a este o grande desafio de coordenar esse processo.*

Capítulo 2

A metodologia de ensino e aprendizagem nos livros didáticos de Matemática

*Verônica Gitirana**

*João Bosco Pitombeira de Carvalho***

Neste capítulo, são discutidas várias metodologias de ensino e aprendizagem, identificadas na análise dos livros didáticos de Matemática destinados aos cinco primeiros anos do Ensino Fundamental. Nosso objetivo é refletir sobre como a escolha de uma determinada proposta metodológica traz consequências para o trabalho docente em sala de aula.

A elaboração de uma obra didática envolve concepções sobre educação e a respeito da Matemática e sua aprendizagem. São essas concepções que também devem orientar a escolha de uma obra didática e a condução do trabalho docente por linhas metodológicas próprias, visto que a maioria dessas obras não usa metodologias bem definidas. Ao contrário, elas podem empregar uma diversidade delas, como a chamada metodologia de "ensino tradicional", a de resolução de problemas, ou a de modelagem matemática, entre outras.

Entre as várias metodologias propostas, destacam-se as do "ensino tradicional" e a metodologia de resolução de problemas, por serem contraditórias em quase todos os aspectos. Porém, não se pretende aqui aprofundar o debate a respeito desta polaridade, mas apenas tentar descrever as duas linhas metodológicas, mesmo que

* Ph. D. em Educação Matemática. Professora e pesquisadora no Centro de Educação da UFPE, na licenciatura em Matemática e no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica.

** Ph. D. em Matemática. Professor visitante do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRJ.

resumidamente. Salientamos que, nos próprios livros didáticos analisados, não há uma distinção clara entre elas. Além disso, temos observado que os professores de Matemática têm incorporado, às suas concepções sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática, metodologias que vão da "tradicional" à de resolução de problemas, passando por diversos estágios intermediários. Notamos, ainda, que em sua prática de sala de aula, muitas vezes, o professor mobiliza alternadamente essas várias metodologias.

A **metodologia de "ensino tradicional"** caracteriza-se pela transmissão de conteúdos matemáticos por meio da apresentação de conceitos, procedimentos e propriedades, seguida de atividades nas quais o aluno deve aplicar o conhecimento que foi exposto. Muitas vezes, essa transmissão de conteúdos é feita com apoio de exercícios resolvidos. Segundo a concepção de aprendizagem que está por trás dessa metodologia, é por meio do treinamento de procedimentos e da repetição de noções que o aluno irá interiorizar o conhecimento matemático. Nesse caso, porém, não há espaço para a autonomia do aluno, para que ele desenvolva estratégias próprias e possa criar e aplicar procedimentos diferentes daqueles já explanados.

Uma escolha metodológica bem distinta é a que se pauta, essencialmente, na participação do aluno nas resoluções de problemas, os quais devem ser planejados e organizados de forma a favorecer que os conhecimentos visados "aflorem". Nesse caso, os conhecimentos resultam da construção coletiva ou individual dos alunos, que podem desenvolver formas de registros e estratégias próprias. Estes são validados para, somente depois, serem discutidos e sistematizados, com o auxílio do professor. Ao docente cabe, por fim, ajudar o aluno a aproximar o conhecimento gerado por ele do que é estabelecido na Matemática.

A concretização de algumas linhas metodológicas

Há obras didáticas de Matemática que adotam, de forma mais consistente, uma ou outra das duas metodologias esboçadas. O mais frequente, no entanto, são as que optam por mesclar esses dois modelos. Forma-se, assim, uma gama complexa de metodologias que caminham para a resolução de problemas, mas ainda carregam muitos aspectos do "ensino tradicional".

Em geral, é comum o uso da condução do trabalho por meio de sequências de atividades propostas ao aluno, em que há uma variação no modo como o conteúdo é sistematizado ou apresentado. No entanto, a existência dessas sequências de atividades não caracteriza uma genuína metodologia de resolução de problemas.

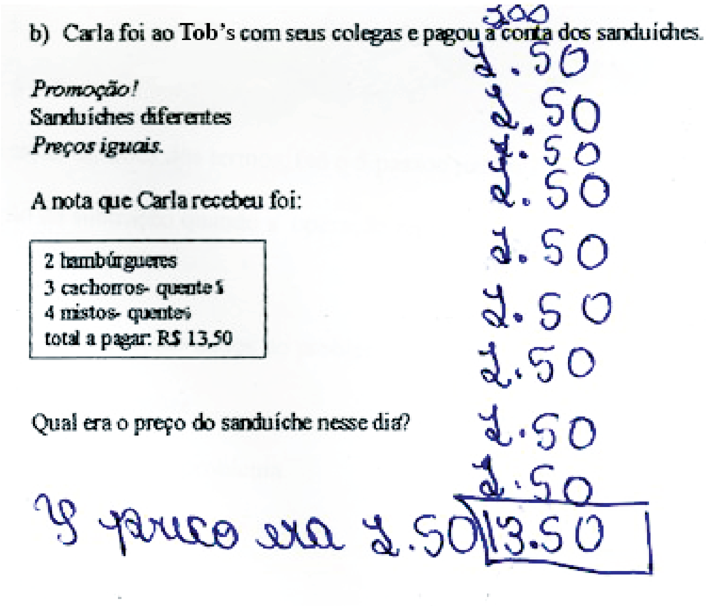
Algumas vezes, em um processo bem próximo a uma metodologia "tradicional", a introdução de ideias ou procedimentos é feita com o uso de vários gêneros textuais, como quadrinhos, textos explicativos, protocolos de alunos. Alguns são bastante atraentes, mas seguidos das "tradicionais" sequências de atividades em que os conhecimentos introduzidos são aplicados.

Há diversas outras variações em torno dessa proposta metodológica. Uma delas insere textos entre as atividades, ou mesmo no próprio enunciado delas, os quais apresentam, pouco a pouco, os conteúdos relevantes, antes de serem aplicados. Nesses casos, a ênfase está na aprendizagem por aplicação do conhecimento transmitido, em que se busca dirigir o aluno bem rapidamente a uma conclusão. A Matemática aí é vista como uma ciência estanque, acabada, sendo que a aprendizagem do aluno se dará por repetição; ou seja, quanto mais ele repetir os procedimentos mais e melhor aprenderá.

Dessa forma, o aluno é, muitas vezes, levado a acreditar que não é capaz de construir um raciocínio matemático sem repetir procedimentos convencionais. Também pode pensar que só é válido o tipo de Matemática que se encontra no livro, ou que é exposto pelo professor. E isso termina por tolher a sua coragem de pensar livremente. Professor, em casos assim, é importante, que você procure complementar as atividades de maneira que seu aluno possa explorar as ideias matemáticas antes de ter os procedimentos convencionais e os conceitos matemáticos formalizados. Essas atividades precisam ser valorizadas, permitindo que os alunos, ao resolvê-las, cheguem às ideias matemáticas, desenvolvam estratégias próprias e participem da construção do seu próprio conhecimento. Para isso,

Busque valorizar o seu aluno. Mostre que você acredita na capacidade dele.

Antes de chegar aos procedimentos e enunciados formalizados, o aluno precisa mobilizar estratégias e representações próprias, que o auxiliem a pensar e a estruturar o seu raciocínio. São elas que servem, além disso, de suporte para a aquisição das estratégias e representações convencionais que são indispensáveis para a comunicação matemática. Vejamos um exemplo:


b) Carla foi ao Tob's com seus colegas e pagou a conta dos sanduíches.

Promoção!
Sanduíches diferentes
Preços iguais.

A nota que Carla recebeu foi:

2 hambúrgueres
3 cachorros- quentes
4 mistos- quentes
total a pagar: R$ 13,50

Qual era o preço do sanduíche nesse dia?

300
1.50
1.50
1.50
1.50
1.50
1.50
1.50
1.50
1.50

O preco era 1.50 $\boxed{13.50}$

FIGURA 1 – Resolução de atividades por estratégia própria

Vários estudos e pesquisas constatam que, por não haver valorização das estratégias próprias, muitos alunos apagam as suas contas e procedimentos, deixando para o professor apenas a resposta final.

Por outro lado, na **metodologia de resolução de problemas** cabe ao docente, com o auxílio do livro didático, inclusive do manual do professor: planejar as atividades que propiciem as situações adequadas para que os conhecimentos matemáticos “aflorem” do ato de resolver problemas; mediar o trabalho dos alunos; e, por fim, auxiliá-los na aproximação entre o conhecimento construído e o conhecimento formal matemático (a sistematização).

Algumas obras didáticas incluem essas sistematizações nas sequências de atividades, às vezes em seções destacadas, indicadas por ícones, e há aquelas que só apresentam as orientações sobre como o docente pode fazer as sistematizações no manual do professor. Também há coleções que trazem apenas sequências de atividades, sem uma proposta de sistematização. Nestes casos, cabe a você, professor, decidir quando e como os conteúdos matemáticos precisarão ser sintetizados. Em geral, a leitura do manual do professor é um bom apoio nesse sentido.

No processo de sistematização, lembre-se de que o nível em que essa sistematização deve ser feita dependerá, basicamente, do desenvolvimento do aluno. Por exemplo: se uma criança não consegue perceber que o total de bombons que estão em dois saquinhos, um com 4 bombons e outro com 3, pode ser obtido a partir da contagem de bombons do primeiro saquinho somado com a quantidade obtida por contagem no outro, mas precisa juntar os conteúdos dos dois saquinhos e contá-los, ela não entenderá a adição **4 + 3** como forma e processo sistematizado para a solução de problemas de composição de duas quantidades discretas. Para esta criança, a solução ainda é juntar os objetos e contá-los.

O uso dos jogos e materiais concretos

O **jogo** é um recurso didático bastante recomendado pelos estudos em Educação Matemática e está muito presente nos livros dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Além de valorizarem o aspecto lúdico da aprendizagem, os jogos têm papel importante na integração da criança ao contexto escolar. Podem auxiliar o aluno, com a ajuda do professor, a: construir o conhecimento matemático em grupo; entender e discutir as regras de ação e negociar ideias e decisões; além de desenvolver comunicações matemáticas e validá-las. Amarelinha, trilhas, tabuleiros, cara ou coroa, boliche, caça ao tesouro, memória, são alguns dos diversos jogos que é possível experimentar com as crianças. Também é importante trazer para a sala de aula os jogos próprios da cultura de sua região, conhecidos por seus alunos, e suscitar a exploração dos conteúdos matemáticos neles envolvidos.

Assim pensado, o jogo é mais um recurso para a aprendizagem da Matemática. Contudo, é muito importante deixar que a criança o viva, de início, em seu aspecto puramente lúdico, sem grandes interrupções. Pode haver situações em que a exploração e a sistematização dos conteúdos envolvidos não surjam naturalmente ao longo das partidas. Professor, nessa situação, você precisará se preparar para discutir e sistematizar tais conhecimentos junto com os alunos.

Algumas obras já incluem, geralmente na sequência dos jogos, seções destinadas à exploração dos conhecimentos matemáticos envolvidos. Isso pode ser entendido no exemplo seguinte, do jogo de caça ao tesouro, adaptado para trabalhar a representação do espaço da escola por meio de planta-baixa.

Caça ao Tesouro

Jogadores: duplas de alunos.

Material: papel e lápis; um objeto por dupla

Regras:

- O professor determina um ambiente da escola no qual os tesouros serão escondidos.
- Cada dupla escolhe um aluno que esconderá o tesouro.
- O aluno escolhido esconde o tesouro sem que o colega veja.
- Após esconder o tesouro, faz uma planta-baixa do ambiente marcando um **x** no local em que o tesouro foi escondido. **(Não é permitido escrever palavras na planta-baixa)**.
- A planta-baixa é, então, entregue ao colega da dupla que tem de usá-la para encontrar o tesouro.
- Marcam pontos as duplas que encontrarem o tesouro em um tempo determinado pelo professor.
- Em seguida, o professor reserva um pequeno tempo para que, nas duplas, os alunos discutam suas representações.
- Os pontos são computados e inicia-se uma segunda rodada; o segundo aluno da dupla tem de esconder o tesouro novamente.

Ao final, ganha o jogo a dupla que fizer mais pontos.

Neste jogo, as crianças trabalham a representação do espaço no plano. Ao trocarem as plantas, a necessidade de um colega comunicar ao outro onde está o tesouro escondido, auxilia a criança que desenhou a validar a sua representação ou, revê-la, caso seja necessário. E vice-versa. Ao final do jogo, ou em aulas seguintes, é importante buscar sistematizar as evoluções dos desenhos das crianças, discutindo, por exemplo, a lateralidade da posição dos objetos, os pontos de referências utilizados, a proporcionalidade, dentre outros aspectos, que dependem do desenvolvimento dos alunos.

FIGURA 2 – Planta-baixa de uma sala de aula desenhada por uma criança

Assim como os jogos, várias outras atividades propiciam que o aluno desenvolva a atitude de buscar **validar suas construções**, um conteúdo atitudinal importante para o desenvolvimento do conhecimento matemático. Muitas vezes, a validação é feita pelo professor, por meio da correção. No entanto, diversas metodologias apresentam esse aspecto como elemento inerente, ou que faz parte da realização da atividade, como no caso do jogo citado.

Os **materiais concretos** são outro recurso didático muito utilizado no ensino da Matemática, graças ao suporte que fornecem para a execução de procedimentos e operações matemáticos. Por exemplo, utiliza-se muito o **material dourado** para trabalhar com o aluno a troca de dezenas por unidades ou de centenas por dezenas. Esse uso o ajuda a perceber, mais facilmente, os agrupamentos e as trocas próprios das operações com os números no sistema de numeração decimal. O **ábaco** também é muito empregado para auxiliar a criança a perceber, concretamente, os agrupamentos que se realizam quando operamos com o sistema decimal de numeração.

Cada vez mais, os livros didáticos vêm incorporando esses materiais. Neles encontramos representados o ábaco, o material dourado, fichas, réguas de *cuisinaire*, cédulas e moedas, dobraduras, dentre outros. Mas é preciso estar atento para assegurar a manipulação desses materiais por parte da criança, mesmo que o livro não dê orientações nesse sentido.

Fazer atividades apenas com desenhos do material concreto não substitui de forma alguma o seu manuseio. Ao contrário, muitas vezes, essas atividades tornam-se desmotivadoras, como pode acontecer ao solicitarmos ao aluno que desenhe placas de material dourado, com 100 cubinhos cada uma, para somar. Alguns livros utilizam o desenho dos materiais concretos, muitas vezes, apenas para orientar a sua utilização. Nesse caso, professor, o ideal é cuidar, com antecedência, da preparação do material a ser trabalhado na sala, criando condições para que os alunos o manuseiem efetivamente. Você será mais bem sucedido se evitar o uso dos materiais desenhados.

Os materiais concretos foram concebidos para serem manipulados pelos alunos. Só assim eles propiciam o início da construção dos conceitos e procedimentos básicos da Matemática.

Entre os diversos materiais concretos utilizados no ensino e aprendizagem da matemática escolar, você pode e deve adaptar aqueles que são propostos no livro didático, de forma a adequá-los aos alunos, respeitando os seus conhecimentos prévios e, principalmente, valorizando sua cultura.

Os seus alunos, com certeza, usam o dinheiro desde muito cedo e conhecem o seu valor. Assim, a utilização de cédulas e moedas é uma excelente oportunidade para trabalhar grupamentos e o uso de "números com vírgula", os **números decimais**. Ao usar materiais concretos já conhecidos da criança, você pode aproveitar conhecimentos socialmente construídos, e tornar os conteúdos matemáticos mais próximos de seu cotidiano. O uso de nosso sistema monetário é uma ótima contextualização para estudar **números e operações**.

Lembre-se: caso a sua escola não disponha de materiais concretos caros, você mesmo, com seus alunos, pode construir muitos deles, usando material de sucata. Não hesite. Envolva a turma na construção e utilização desses materiais.

Experimentos e construções

Os experimentos e construções são, igualmente, empregados com sucesso no ensino e aprendizagem da Matemática. O emprego de construções, como dobraduras, brinquedos infantis, sólidos geométricos com canudos, massas de modelar e as planificações, possibilitam que o aluno veja, explore e sinta, de forma concreta, conceitos e propriedades matemáticas. Você e seus alunos podem explorar a rigidez do triângulo (Figura 3), por exemplo, ao construírem essa figura geométrica com canudos e linhas.

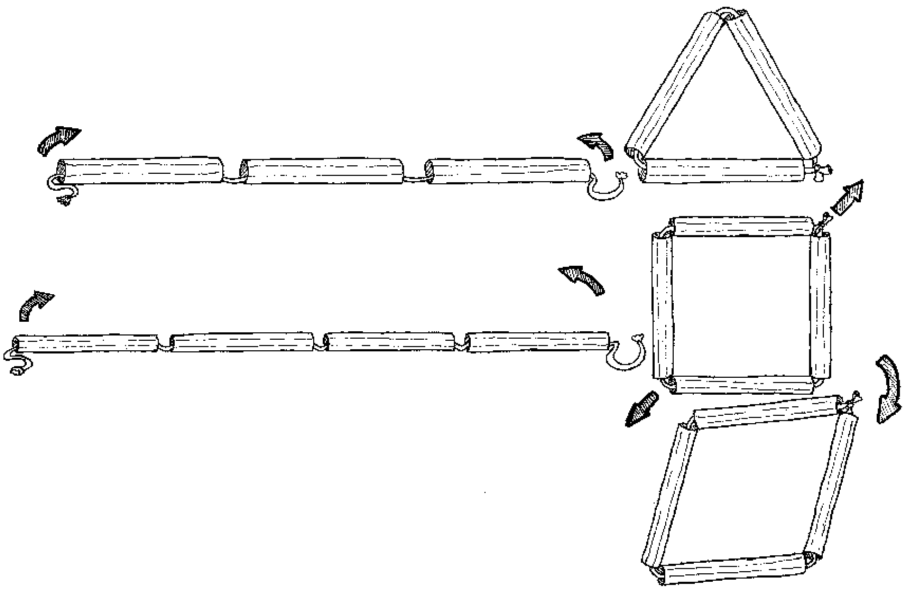


FIGURA 3 – Construção do triângulo e de um quadrilátero com canudos

A utilização desses recursos permite o desenvolvimento de uma habilidade matemática fundamental: a de **fazer conjecturas**. Por meio de verificação da validade de "propriedades matemáticas" em exemplos específicos, concretos, o aluno começa a perceber que estas propriedades podem ser verdadeiras ou a desconfiar que elas são falsas. Essa é uma prática essencial a ser desenvolvida pela criança para que ela entenda o porquê da validade da propriedade, e não se limite simplesmente a gravá-la na memória.

A simples memorização de uma propriedade matemática, sem a compreensão real de seu significado, inibe sua utilização em situações-problema. Por exemplo, para que o aluno realmente compreenda que a soma de dois números ímpares é sempre um número par, pode-se começar por lhe fornecer botões, com os quais deve representar dois números ímpares. Juntando os dois conjuntos de botões, ele perceberá, facilmente, após algumas experiências, que os botões do conjunto resultante podem ser emparelhados dois a dois, e que elas representam, portanto, um número par. Isso é mais eficiente do que tentar associar a noção de par com um "par de sapatos", ou "de meias", entre outros (Figura 4).

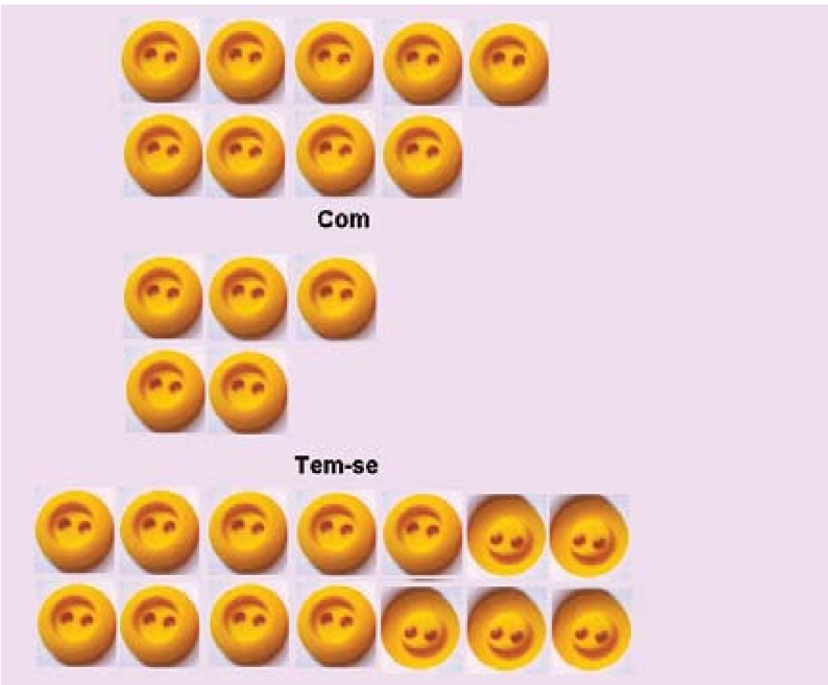


FIGURA 4 – Experimento com botões na soma de dois números ímpares

A investigação e os projetos como recursos didáticos

A **investigação** é mais uma estratégia bastante valorizada, especialmente na exploração de temas da estatística e das probabilidades. O estudo da estatística exige o desenvolvimento de habilidades, como: a definição de uma questão a ser investigada; a formulação das hipóteses que podem ser feitas para atacarmos a questão; a identificação das variáveis; a forma de coleta; a organização e o tratamento dos dados; além da interpretação e resposta aos aspectos levantados. Também importantes em outros campos da Matemática, as investigações são essenciais para o **letramento estatístico**. Vários exemplos disso são explicitados e aprofundados no capítulo 9 do presente livro, dedicado ao tratamento da informação.

O uso de **projetos**, por sua vez, é um recurso didático que pode ser aplicado na abordagem de diferentes conteúdos escolares, em situações naturais. Com o desenvolvimento de projetos incentiva-se o trabalho em grupo. Partindo-se de uma problemática de interesse dos alunos é possível abordar conteúdos de diferentes áreas, o que favorece a interdisciplinaridade. Pode ser muito frutífero, por exemplo, a realização de um projeto, em conjunto com o professor de Artes, no qual seja trabalhada a representação de sólidos geométricos em perspectiva ou utilizando vistas.

A Matemática não é constituída por partes estanques. Assim, no contexto de um mesmo projeto, é possível explorar os diversos campos da matemática escolar. Um projeto pode abranger ilustrações e figuras de sólidos geométricos, que modelam os objetos focalizados no trabalho, além de trazer a estatística aplicada no levantamento dos dados necessários, assim como na organização e tomada de decisões. Com frequência, os projetos envolvem a medição de grandezas em outras áreas do conhecimento, o que também favorece o trabalho interdisciplinar. A elaboração de um jornal da escola, por exemplo, exige a discussão de aspectos da geometria que são relevantes para a diagramação. A estimativa de quantidade também é importante para a decisão de quantos jornais devem ser impressos, dentre outros aspectos da Matemática que podem ser tratados.

Ainda pouco presentes nos livros didáticos, os projetos geralmente são oferecidos como atividades complementares ou que finalizam unidades. Sendo este o caso da obra com que você esteja trabalhando, procure integrar os projetos ao planejamento anual e busque adaptá-los à realidade sociocultural de seus alunos. Lembre-se de que você também pode criar projetos. Nesse sentido, há manuais do professor que oferecem boas sugestões.

A modelagem matemática

A Matemática pode ser vista como uma fonte de modelos para os fenômenos nas mais diversas áreas do saber. Modelos são construções abstratas que se constituem em instrumentos para ajudar na compreensão desses fenômenos. Os modelos matemáticos variam de muito simples a bem sofisticados desde, por exemplo, o problema de saber quantas bolas de gude terei ao adicionar cinco bolinhas às sete que já possuo, o qual pode ser modelado pela operação de adição, **7+5=12**, até a teoria da gravitação universal de Newton, que permite calcular a trajetória de uma nave espacial.

Professor, como você sabe, em seus primeiros contatos com a adição, muitos alunos criam modelos em que as parcelas são representadas por pontos ou traços (a modelagem dos números por pontos já era utilizada pelos pitagóricos[1], em torno de 550 anos a.C.). E não nos esqueçamos de que ao desenhar um triângulo ou um cubo, por exemplo, o aluno está construindo um modelo para estes entes geométricos, respectivamente, uma figura plana e um sólido geométrico.

Nesse sentido, a **modelagem matemática** também é uma metodologia de ensino que incentiva a construção do conhecimento pelo aluno a partir da produção de modelos para resolver situações-problema. Para isso, os modelos matemáticos precisam ser criados e explorados pelos alunos. Além disso, é importante discutir com as crianças, os limites da validade dos modelos que criaram, ou seja, quando podem ser aplicados.

Não se põe em dúvida, hoje, o fato de que o aluno deve aprender Matemática para usá-la em situações reais e não apenas como uma ciência isolada de sua vida. Aplicar a Matemática no dia a dia exige que o aluno desenvolva a habilidade de modelar. No entanto,

---

[1] Pitagóricos é o nome pelo qual ficaram conhecidos os discípulos ou continuadores das ideias de Pitágoras, filósofo e matemático grego, nascido em 571 a.C. na cidade de Samos. Pitágoras fundou uma escola mística e filosófica em Crotona (colônia grega na península itálica), a Escola Pitagórica, cujos princípios foram determinantes para a evolução geral da matemática e da filosofia ocidental. Os pitagóricos interessavam-se pelo estudo das propriedades dos números – para eles o número era considerado como essência das coisas.

vários hábitos de nossa prática docente impedem, ou dificultam, que o aluno desenvolva habilidades básicas necessárias ao uso efetivo da Matemática em seu cotidiano. Por exemplo, algumas vezes, a exploração repetida de um mesmo tipo de situação faz com que o aluno não precise pensar quais são as noções, procedimentos e propriedades matemáticos necessários à solução do problema, assim como quais as variáveis que importam na sua resolução. Uma situação interessante é a de uma criança que leva para casa, e mostra à mãe, uma tarefa de adições com reagrupamento, respondida parcialmente. Na tarefa, todas as dezenas tinham sido somadas com a adição de mais uma dezena. A mãe verifica que todas as somas de dezenas estão corretas e pergunta: *como você fez isto?* Ao que ela responde rapidamente: *Ah, mãe, é a atividade de vai um*. De fato, a ficha trazia apenas adições em que a soma das unidades exigia o reagrupamento

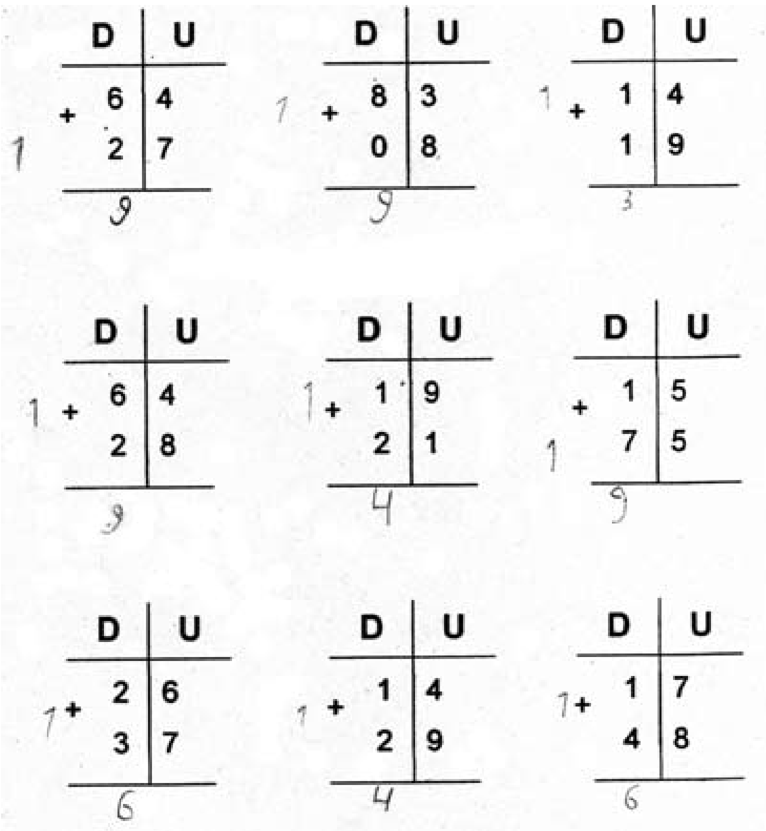


FIGURA 5 – Resposta parcial de aluno à ficha de atividades repetitivas

Este é apenas um caso, mas é muito frequente encontrarmos situações, ou organizações de fichas, em que o aluno não precisa analisar a situação para decidir qual a estratégia matemática que usará ali. Ele facilmente identifica padrões no preenchimento desse tipo de ficha. Assim, não gasta mais tempo nas interpretações e deixa de desenvolver habilidades essenciais que lhe permitiriam utilizar o conhecimento matemático em situações não escolares, ou mesmo em outras disciplinas.

O momento didático tem sido definidor para que o aluno conclua, de antemão, qual conhecimento utilizar ao resolver um problema dado. Isso acontece, por exemplo, se no momento didático de se estudar a multiplicação todos os problemas são resolvidos apenas por multiplicação, como acontece frequentemente. Para evitar essa armadilha, professor, é importante propor situações que impulsionem o seu aluno a ter que decidir que procedimento matemático utilizar. No estudo das operações, por exemplo, ao apresentar sequências de atividades, cuide para que tanto os problemas quanto as operações envolvidas em sua resolução sejam diversificados.

Em um conjunto de problemas que envolvem a divisão, que tal introduzir questões que podem ser resolvidas tanto com adições quanto com multiplicações?

A etnomatemática, a cultura e o conhecimento extraescolar

Os estudos em **etnomatemática** têm trazido para o ensino e a aprendizagem da Matemática algumas reflexões muito relevantes. Neles, defende-se que a Matemática existe não somente na academia, mas é, principalmente, uma produção cultural e está enraizada nas diversas atividades realizadas pelos homens em sua vida em sociedade. Várias pesquisas mostram, ainda, que, em virtude desse enraizamento, a Matemática guarda traços visíveis da cultura em que é criada.

Nesse sentido, em uma orientação metodológica influenciada pela etnomatemática, devemos valorizar os conhecimentos prévios dos alunos, com destaque para os que trazem marcas mais nítidas da cultura de que fazem parte. Com isso, permitimos que o aluno identifique a Matemática que está presente na cultura e perceba que ela é, de fato, praticada por todos no dia a dia. Tomar consciência deste fato contribui para desmistificar a Matemática e auxilia o aluno a apropriar-se do conhecimento matemático pela evidência de seus usos sociais.

Por exemplo, você, professor, pode resgatar saberes utilizados em diversas profissões ou culturas para discutir a matemática neles utilizada e as formas como ela é praticada. Partindo-se do conhecimento usado por feirantes, por exemplo, no cálculo do valor das compras e dos trocos, é possível ajudar o aluno a entender outros algoritmos das operações ou mesmo as propriedades das operações que podem auxiliar a realização do cálculo mental.

Neste caso, os sujeitos usam uma estratégia que corresponde ao fato de que:

A+ B = (A+C) + (B-C) para quaisquer números A, B e C.

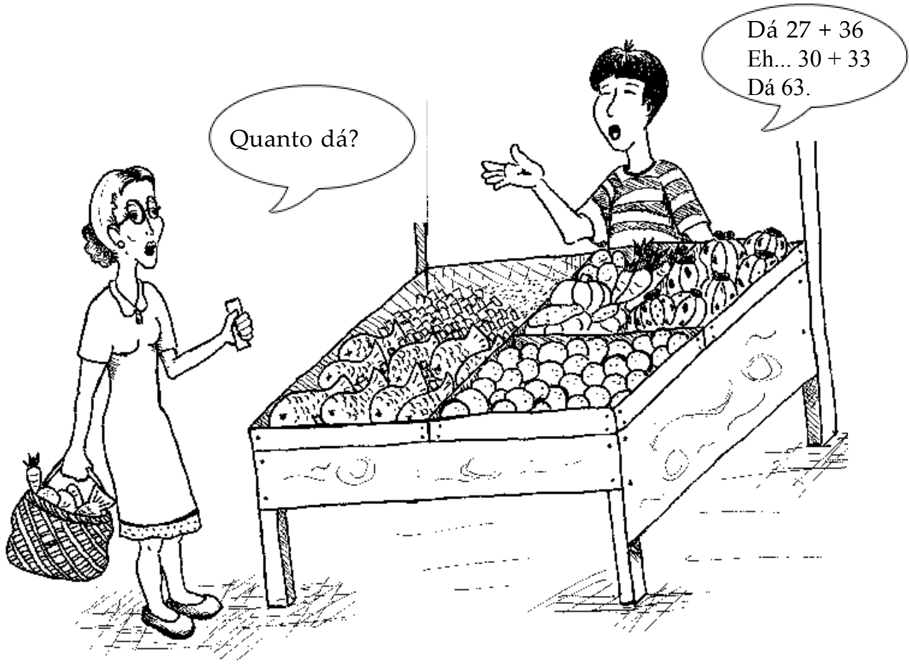


FIGURA 6 – Cálculo mental e estratégias de tratamento algébrico

Os trabalhos com crochê podem ser aproveitados, por exemplo, para se observar e estudar as rotações de um padrão geométrico. A arte indígena também é uma fonte bastante rica de elementos que utilizam padrões geométricos e simetrias. Este assunto propicia excelentes oportunidades para trabalho conjunto com o professor de Artes, por exemplo.

Note-se que nas peças abaixo há um modelo ideal matemático e algumas deformações desse modelo ocorrem no objeto, até mesmo por serem objetos artesanais.

FIGURA 7 – Artefato cultural com padrões geométricos

A história da Matemática como um recurso no ensino

Levar a história do conhecimento matemático para a sala de aula é um recurso didático que já está praticamente incorporado ao ensino desse saber. Pesquisas sobre dificuldades que, historicamente, foram obstáculos na evolução do conhecimento têm revelado muitas semelhanças com as que são vividas pelos alunos na aprendizagem de diversos conteúdos matemáticos. A concepção de número como representação de uma quantidade foi um dos obstáculos para a aceitação do número negativo, por exemplo. A partir disso, tem-se buscado ampliar cada vez mais a exploração de outros significados do número, bem antes de introduzir o número negativo.

Além disso, a história da Matemática auxilia os alunos a entender essa área do conhecimento em seu processo de evolução. Contribui, igualmente, para desmistificar a ideia de que a Matemática é uma ciência estanque, acabada e, acima de tudo, inatingível para um aluno do Ensino Fundamental.

Apresentar a Matemática construída por diferentes povos, em diferentes épocas, ajuda os alunos a entenderem os conceitos, procedimentos e sistemas matemáticos. Importantes propriedades de nosso sistema de numeração decimal são explicitadas, por exemplo, na comparação com propriedades encontradas em sistemas de numeração antigos, como os desenvolvidos pelos egípcios, maias e astecas, entre outros povos.

O fato de o sistema de numeração romano não ser posicional, por exemplo, contribui para que o aluno entenda o valor posicional do nosso sistema de numeração decimal. No sistema de numeração romano, os símbolos podem ocupar diferentes posições e continuar a ter o mesmo valor, como nos números abaixo:

X, XI, CXIII

No primeiro exemplo, o **X** aparece como o primeiro símbolo, da direita para a esquerda, e assume o **valor 10**; no segundo, ele é o segundo símbolo, mas possui o mesmo **valor 10**; no terceiro exemplo, o **X** é o quarto símbolo, mas permanece representando o valor **10**. No caso do nosso sistema de numeração decimal, o valor que um algarismo assume na composição do número é dado por ele e por sua posição, considerada da direita para a esquerda. Assim, se o algarismo **2** aparece na segunda posição, da direita para a esquerda, ele sempre representará **20 unidades**, independentemente dos demais algarismos que apareçam. Mas, em qualquer outra posição terá outro valor, a saber: **2**, na primeira, **200** na terceira, **2.000** na quarta, **20.000** na quinta, e assim por diante.

A coerência com o ensino de outras áreas de conhecimento

O uso de textos variados também merece destaque, por seu papel relevante no ensino da Matemática. As cantigas, fábulas, quadrinhos, entre outros gêneros textuais, contribuem para aproximar o conteúdo matemático do universo infantil. As receitas culinárias têm sido igualmente empregadas, com sucesso, na aprendizagem da Matemática. Ao lê-las, executá-las, e provar os resultados obtidos, o aluno pode entender melhor as grandezas e medidas envolvidas, assim como suas proporcionalidades. Além disso, ele irá perceber o conhecimento matemático aplicado a um contexto natural da sociedade. Propor à criança que também construa suas próprias receitas é uma boa maneira de levá-la a registrar uma informação e um ótimo ponto de partida para que ela, pouco a pouco, aprimore os registros matemáticos dessas grandezas.

A aprendizagem da Matemática se dá em conjunção com a construção do conhecimento de diversos outros campos, em particular com a alfabetização, leitura e escrita na língua materna. Nesse sentido, mesmo que seu livro não tenha indicações sobre como conduzir a leitura nos anos iniciais, é importante que você reflita a respeito e mantenha a mesma linha de trabalho desenvolvida no estudo da Língua Portuguesa. É igualmente recomendável ficar atento aos tipos de letras que a criança está aprendendo nos livros de alfabetização para que, particularmente em Matemática, você adote a mesma tipologia. Lembre-se de que, mesmo sem orientações específicas, muitas vezes, você terá que ser o leitor para a criança, principalmente no caso de enunciados e textos longos, encontrados nos livros do 1º e 2º anos.

O currículo em rede

Os educadores matemáticos defendem a ideia de que os conceitos relevantes para a formação matemática atual devem ser abordados desde o início da formação escolar. Isso vale mesmo para conceitos que possuem níveis elevados de complexidade, tais como os de número racional, probabilidade, semelhança, simetria, entre muitos outros. Tal ponto de vista apoia-se na concepção de que a construção de um conceito pelas pessoas processa-se no decorrer de um longo período, dos estágios mais intuitivos aos mais formais. Além disso, um conceito nunca é isolado, mas se integra a um conjunto de outros por meio de relações, que vão das mais simples às mais complexas. Dessa maneira, não podemos esperar que a aprendizagem de conceitos e procedimentos se realize de forma completa e em um período curto de tempo. Por isso, ela é mais efetiva quando os conteúdos são revisitados, de forma progressiva, ampliados e aprofundados, durante todo o percurso escolar. Assim, é preciso que esses vários momentos sejam bem articulados, em especial, evitando-se a fragmentação ou as retomadas repetitivas.

Os conteúdos matemáticos se integram e devem ser tratados a partir de conhecimentos já estudados. Essa perspectiva tem sido bastante adotada nos livros didáticos ao longo dos anos. Mas cabe a você, professor, decidir o nível dessas retomadas, a partir do conhecimento que você possui sobre a sua turma. O ideal, sempre, é procurar não repetir as atividades, mas apresentar algumas novas.

Cuide para que sejam atividades interessantes, intrigantes, que auxiliem o aluno a relembrar um conhecimento já dominado, para aprofundá-lo e integrá-lo a um novo conhecimento.

As tecnologias na sala de aula

As tecnologias da informação e da comunicação estão cada vez mais difundidas na sociedade. A cada momento, nos deparamos com seu uso nos bancos, supermercados, farmácias, entre outros. Assim, o uso dessas tecnologias em sala de aula é essencial para a formação de um cidadão pleno, que possa desenvolver e aplicar o seu conhecimento matemático no dia a dia e consiga aproveitar as potencialidades desses recursos para aprender mais.

Saber usar a calculadora, por exemplo, é hoje uma das competências de cálculo que o aluno deve desenvolver. Em particular, a calculadora não deve ser empregada, simplesmente, para efetuar operações, mas como auxiliar na exploração e investigação de situações-problema. Por exemplo, ela permite que o aluno verifique, na prática, que multiplicar um número decimal por **10**, **100**, **1000**,... corresponde a deslocar sua "vírgula" uma, duas, três, ... casas para a direita.

Os computadores e a internet também oferecem oportunidades que facilitam o desenvolvimento e o entendimento de conceitos e procedimentos matemáticos. Entre outras possibilidades, o uso de figuras elaboradas em aplicativos (softwares) de geometria dinâmica pode auxiliar o aluno a entender as figuras geométricas como classes, diferenciando-as do simples desenho de uma figura.

A simbologia matemática

A simbologia matemática tem sido um aspecto importante para a produção do conhecimento matemático, assim como para a sua comunicação. Nossa simbologia atual começou a ser instituída com o matemático francês François Viète (1540 a 1603), e foi aperfeiçoada por René Descartes (1596 a 1650) e muitos outros.

Apesar de sua importância, os símbolos são instrumentos para o desenvolvimento da Matemática, e não um objeto de estudo em si mesmo, como ocorre em algumas tendências de ensino mais tradicional. Segundo esta tendência, é necessário primeiro aprender a linguagem matemática, para depois utilizá-la. Acreditamos, ao contrário, que esta simbologia deve ser ensinada, pouco a pouco, e utilizada à medida que seja necessária. Ou seja, o que se defende é que ela não se transforme em objeto de estudo para as crianças, mas em um instrumento que as auxilie no pensar matemático e lhes permita entender e se comunicar matematicamente.

É nesse sentido, professor, que pode ser bem interessante aproximar as representações matemáticas escolares das notações matemáticas utilizadas no cotidiano, nas diversas profissões e culturas. As frações que, na escola, são normalmente denotadas por um número, um traço abaixo deste número, e outro número abaixo do traço($\frac{1}{2}$), aparecem com outras notações no cotidiano. Esta mesma fração, em textos correntes, costuma aparecer representada como ½, ou ser identificada pelos termos meio, metade. Aplicar o conhecimento matemático à vida cotidiana também exige que saibamos identificar essas diversas notações como referentes a um mesmo elemento matemático. É nesse sentido que o uso de vários tipos de textos, o resgate do conhecimento cultural e dos conhecimentos prévios auxiliará o aluno a ampliar o seu conhecimento matemático.

Aspectos gráfico-editoriais do material para manuseio

Em sua grande maioria, os livros didáticos oferecem moldes para recorte ou reprodução, como apoio ao professor na elaboração dos materiais necessários ao desenvolvimento das atividades. Ao utilizar esses recursos, é preciso levar em conta o aluno, em particular, o seu nível de desenvolvimento motor. Uma criança pequena tem dificuldade para recortar peças muito reduzidas, curvas ou cheias de detalhes. Assim, antes de solicitar que ela corte todo o material, avalie sua capacidade motora. De posse dessas informações, aproveite também para estimular o desenvolvimento das habilidades motoras de seus alunos.

É bem complicado montar sólidos por meio de planificações com papéis de espessura muito reduzida, como a de uma folha de papel ofício. Mesmo para adultos, a montagem de um cubo nessas condições é tarefa árdua. Para facilitar esse trabalho, é possível colar os moldes para recortes em cartolinas, por exemplo. Da mesma maneira, os moldes das peças do tangram serão manipulados mais facilmente se forem colados sobre pedaços de papelão ou de isopor, todos provenientes da reciclagem de material. Isto facilitará à criança ter o material manipulável em condições de uso durante todo o ano.

É importante que você, professor, procure reproduzir, em papel ou papelão, os moldes que de fato dão suporte ao trabalho de manuseio. O emprego de materiais de reciclagem é sempre uma ótima opção. Por exemplo, é possível construir-se um ábaco com palitos de churrasco, tampas de refrigerantes e uma caixa de pasta de dente como suporte.

foto de: Verônica Gitirana

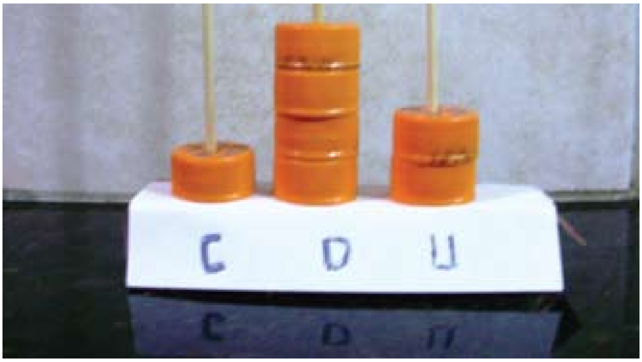


FIGURA 8 – Ábaco feito com sucata

Crianças pequenas, ainda em processo de alfabetização, não conseguem controlar muito bem o tamanho de sua letra ou de seus desenhos e representações. Por isso, os espaços reservados para suas respostas às atividades devem considerar essas limitações. Muitas vezes, um espaço muito pequeno dificulta que a criança, mais tarde, entenda a própria resposta. Veja no exemplo da Figura 9 como a contagem solicitada é quase impedida pela desorganização e o pouco espaço deixado.

"Uma imagem vale mais que mil palavras"

No ensino da Matemática esta frase famosa também é válida. O suporte dado aos textos pelas imagens é essencial. Mas estas precisam estar bem sintonizadas com a abordagem proposta. A imagem empregada em uma atividade deve auxiliar o aluno a entender a situação, ao trazer informações úteis à resolução da questão.

Por sua vez, o espaço tridimensional pode ser representado por diversas técnicas, cada uma com características que exigem diferentes habilidades de interpretação. É preciso ter cuidado para que as variações desses tipos de representação não atrapalhem o aprendizado do aluno e nem desviem sua atenção do foco pretendido. Por exemplo, quando a proporcionalidade entre os objetos representados não é respeitada, a criança pode se confundir e ser induzida a interpretações diferentes daquelas visadas na atividade. Professor não descuide desse fato!

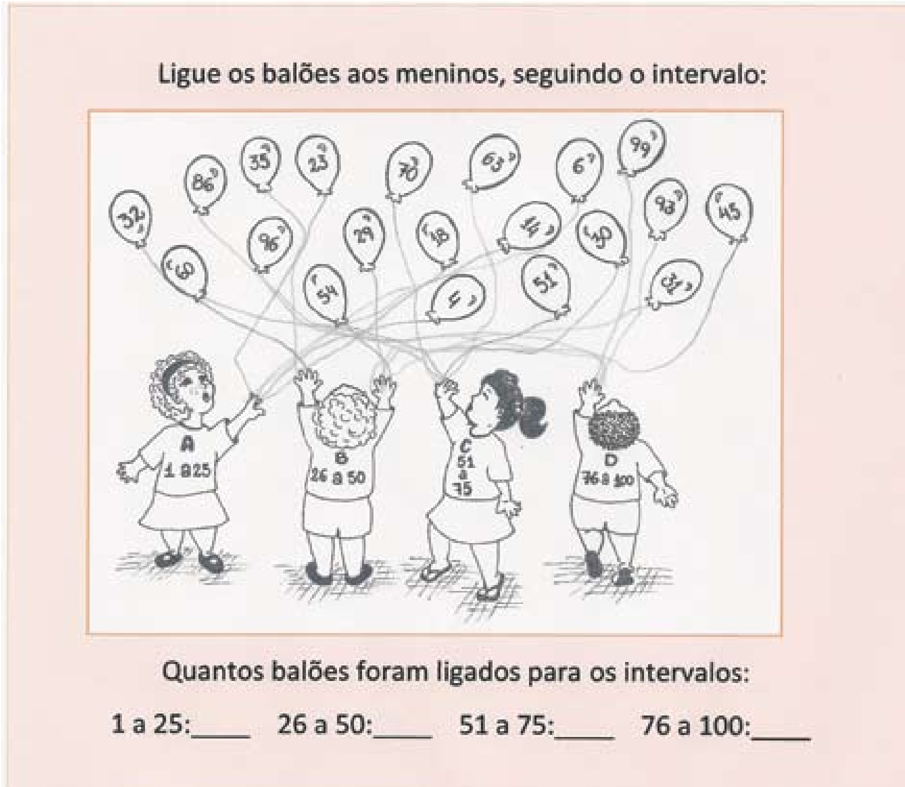


FIGURA 9 – Atividade com problema gráfico

Considerações finais

Toda coleção de livros didáticos traz consigo princípios metodológicos que orientaram os autores na organização de suas obras. Nesse sentido, podem induzir à adoção dessas propostas metodológicas. No entanto, a metodologia, de fato, se dá nas relações estabelecidas na sala de aula entre professores, alunos e o conhecimento. Portanto, professor, você é o ator principal na condução e adequação da metodologia e das práticas pedagógicas que propiciem ao seu aluno desenvolver capacidades e competências matemáticas que permitam a ele atuar como cidadão crítico e consciente.

Capítulo 3

Manual do professor: do livro com respostas ao manual de orientação didático-metodológica

*João Bosco Pitombeira de Carvalho**
*Verônica Gitirana***

O **manual do professor** das coleções de Matemática para o Ensino Fundamental vem se modificando nos últimos anos. Até o início dos anos 1990, ele não passava de uma cópia do livro do aluno, complementada com as respostas dos exercícios propostos. Atualmente, os manuais têm duas partes. A primeira é uma cópia do livro do aluno, acrescida de respostas ou resoluções de atividades, de sugestões e de orientações sucintas. A segunda parte contém material teórico-metodológico destinado ao docente e aparece sob vários títulos: *manual pedagógico*, *caderno de orientação do professor*, *suplemento pedagógico*, entre outras denominações.

As mudanças de qualidade verificadas nos manuais do professor dos livros didáticos, certamente, podem ser creditadas ao Programa Nacional do Livro Didático – PNLD.

> "O manual do professor deve visar, antes de mais nada, a orientar os docentes para um uso adequado da coleção, constituindo-se, ainda, num instrumento de complementação didático-pedagógica e atualização para o docente. Nesse sentido, o manual deve ser organizado de modo a propiciar ao docente uma efetiva reflexão sobre sua prática.

* Ph. D. em Matemática. Professor visitante do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRJ.
** Ph. D. em Educação Matemática. Professora e pesquisadora no Centro de Educação da UFPE, na licenciatura em Matemática e no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica.

> Deve, ainda, colaborar para que o processo de ensino-aprendizagem acompanhe avanços recentes, tanto no campo de conhecimento do componente curricular da coleção, quanto no da pedagogia e da didática em geral."
> Edital do PNLD 2011, p. 39.

Assim, para ser valioso auxílio ao trabalho dos docentes, um manual do professor deve apresentar ou discutir:

- As concepções teóricas e metodológicas pressupostas na coleção.
- A correlação entre a proposta didático-pedagógica da coleção e os principais documentos públicos nacionais.
- A estruturação da coleção e o planejamento anual.
- Orientações para uso das atividades propostas na coleção.
- Orientações quanto à avaliação da aprendizagem.
- Os materiais concretos sugeridos na obra e as orientações para seu uso.
- Sugestão de leituras complementares e de aprofundamento para o professor.

Aos poucos, firma-se no Brasil uma tendência, já presente em muitos países. De acordo com ela, as coleções de livros didáticos de Matemática devem conter manuais do professor que contemplem os itens acima e acompanhem livros do aluno mais concisos: com uma seleção cuidadosa de atividades propostas e limitando, ao essencial, a quantidade de conceitos e procedimentos abordados. Dessa forma, as coleções transformam-se em roteiros a partir dos quais o professor pode elaborar seu próprio curso, com o apoio das orientações, sugestões e atividades suplementares contidas nos manuais do professor.

Deve-se salientar que um bom suplemento pedagógico, além de auxiliar na condução do trabalho docente com os livros didáticos, é um veículo para que as tendências atuais do ensino da Matemática cheguem a todos os professores.

As concepções teóricas e metodológicas pressupostas na coleção

A elaboração de uma obra didática pressupõe diversas decisões como: a organização dos campos de conteúdo ao longo da obra; as metodologias adotadas e as atividades que são propostas ao aluno; o uso de jogos, experimentos e desafios; a retomada, ou não, dos conteúdos; a inclusão de atividades suplementares. Dão suporte a essa tarefa, a concepção do(s) autor(es) sobre: o que é Matemática, como deve ser o seu ensino, como a criança aprende, dentre outras. Nesse sentido, é muito importante que você, professor, conheça as concepções que foram utilizadas na construção da obra que pretende escolher ou com a qual está trabalhando. Esse é um dos papéis dos suplementos pedagógicos dos manuais. Por isso, a explicitação dessas concepções precisa deixar claros os pressupostos a partir dos quais o livro foi concebido. Um suplemento pedagógico bem elaborado deve ser lido com muita atenção. Tanto assim que, havendo a possibilidade, o ideal é que a equipe de professores de uma escola – que trabalhe com uma mesma coleção de livros didáticos – possa organizar coletivamente a leitura e a discussão do manual do professor, antes de começar a usar a coleção em sala de aula. Essa leitura pode ajudá-los a identificar os pressupostos do projeto pedagógico da escola que estão em sintonia com as propostas da obra e aqueles que se afastam desse projeto. Além disso, ela facilitará a escolha de temas de aprofundamentos para uso do livro.

Você também pode reler as orientações e sugestões do manual do professor em diversos momentos do trabalho, tanto no início do ano letivo quanto de tempos em tempos, à medida que conhece melhor a obra, em seu conjunto. Deste modo, terá mais elementos para comparar o que o manual afirma sobre suas concepções de ensino e aprendizagem com o que realmente é feito no livro – inclusive no que diz respeito às orientações metodológicas incluídas na cópia do livro do aluno que faz parte do manual do professor ou em seu suplemento pedagógico. Por exemplo, ao começar a trabalhar com um jogo proposto na obra, é interessante voltar e ler por que o livro utiliza jogos na abordagem da Matemática.

A leitura dos pressupostos utilizados como base para a construção de uma obra é essencial para você entender as razões que inspiraram o(s) autor(es) em sua organização e poder tomar decisões sobre como você a utilizará com os seus alunos.

A proposta didático-pedagógica da coleção e os documentos públicos nacionais

Uma coleção de livros didáticos de Matemática tem por finalidade dar suporte ao trabalho docente no contexto da educação nacional. Nesse sentido, espera-se que o manual do professor contribua com a discussão dos principais documentos que apresentam orientações para o ensino de Matemática no País, tais como: os *Parâmetros Curriculares Nacionais*, as *Diretrizes curriculares do Ensino Fundamental*, e as *Diretrizes para a Educação Infantil* (com o novo Ensino Fundamental de 9 anos), entre outros. Além disso, deve sugerir aos professores que se informem sobre as diretrizes curriculares adotadas em seus estados e municípios.

A estrutura da coleção: pressupostos e planejamento anual

Com base nos pressupostos teóricos e metodológicos, os autores escolhem uma estrutura para a coleção. São muitos e variados os modelos de estrutura que podem ser observados nas obras didáticas de Matemática e não é possível aqui comentar todos eles. Fazemos apenas algumas ponderações sobre este tópico.

Uma tendência bastante comum às coleções atuais é a inclusão de **seções especiais**, em que são trabalhados aspectos de metodologias específicas ou em que se procura desenvolver algum tipo particular de competência. Estas seções são quase sempre indicadas por ícones ou por outros recursos gráficos de realce. As coleções em que a interdisciplinaridade é valorizada trazem a organização dos conteúdos em capítulos ou unidades que correlacionam diferentes campos da Matemática com conhecimento de outras ciências.

Muitos manuais do professor apresentam uma descrição mais detalhada da estrutura das coleções, incluindo informações sobre as seções especiais e sobre as unidades ou capítulos da obra. Também trazem, com frequência, sugestões e comentários para auxiliar o professor, aula a aula.

Além de apoiar o trabalho do professor em cada aula, os livros didáticos trazem uma proposta de organização dos conteúdos e acabam influindo na ordem e na maneira como esses conteúdos são abordados ao longo do ano letivo. Por isso, são cada vez mais importantes as orientações do manual do professor, que auxiliam a explicitação dessa organização. Por vezes, encontram-se quadros com indicação de como são distribuídos na obra os conteúdos, assim como assinalados os tipos de atividades propostas ao longo do ano e de toda a coleção. Algumas obras chegam a incluir até mesmo um planejamento detalhado para o ano letivo, listando quanto tempo o autor prevê para cada unidade ou capítulo.

Assim, antes de começar a usar o livro escolhido, procure conhecer a descrição que o autor faz de sua obra. Isso poderá ajudá-lo a planejar melhor o uso do livro didático e o ritmo de exploração dos conteúdos ao longo do ano letivo, garantindo a abordagem de todos os tópicos importantes.

A leitura das orientações sobre a estrutura da coleção pode ajudá-lo a entender melhor as suas propostas, além de auxiliá-lo no planejamento anual.

É preciso cuidado e atenção, no entanto, para que as descrições detalhadas sobre o uso das obras não comprometam ou dificultem a autonomia do professor. O tempo didático-pedagógico anual disponível para o trabalho com a Matemática, por exemplo, tem obrigado o professor a omitir alguns conteúdos ou mudar a ordem de sua abordagem. É importante que os manuais proponham como isso pode ser feito sem prejuízo para a aprendizagem dos alunos. Tais orientações ainda são pouco presentes nos manuais. Mesmo as coleções que possuem livros extensos, com muitas atividades, não esclarecem quais delas são consideradas essenciais e quais podem ser deixadas de lado. Para que você professor decida sobre estas questões é necessário que faça uma análise detalhada do planejamento anual fornecido pelo manual do professor e compare esse planejamento com o de sua escola.

Também é muito comum os manuais trazerem uma discussão geral sobre cada um dos campos da Matemática tratados. Nela, são indicados os elementos do campo considerados essenciais para serem trabalhados no ano letivo e aqueles que são complementares e, ainda, destacam-se as ênfases dadas a cada tópico, pela sua importância na formação matemática do aluno.

A leitura crítica dos textos sobre os campos tratados na coleção, feita preferencialmente pela equipe de professores da escola, também ajudará no processo natural de formação contínua, pautada na reflexão da prática de ensino.

Orientações para uso das atividades propostas

No suplemento pedagógico dos manuais do professor, inclui-se também uma parte específica a cada volume que traz:

- O planejamento anual do curso.
- As orientações para uso das atividades propostas.
- A apresentação dos materiais concretos e orientações para seu uso.

Ao detalhar as orientações para uso das atividades propostas, alguns suplementos pedagógicos oferecem um mapeamento por unidade, ou capítulo, das habilidades e competências exploradas, muitas vezes relacionando-as com as atividades. Esse mapeamento auxilia o professor a identificar os pontos necessários a serem complementados ou suprimidos. Além disso, fornece indicadores importantes para as avaliações, tema que será discutido mais adiante neste capítulo.

Cabe ao manual do professor explicitar quais os objetivos de cada atividade, de acordo com as decisões didático-pedagógicas tomadas na obra. Essas orientações específicas por atividade têm sido cada vez mais aprimoradas nos manuais. Sua leitura auxiliará você, professor, a entender o papel de cada uma delas na construção do conhecimento matemático por seus alunos.

As respostas às atividades propostas, que já foram supervalorizadas nos livros didáticos de Matemática, continuam presentes nos manuais do professor, mas em uma versão, em geral, bem mais apropriada. Além das respostas a cada atividade, muitas obras discutem as possíveis estratégias de resolução que podem ser encontradas pelos alunos, indicando inclusive as dificuldades que costumam aparecer. Essa é uma tendência observada em vários manuais e que ajuda bastante na preparação de uma boa aula. Tais "previsões" de estratégias também auxiliam na identificação de variáveis para a condução do trabalho docente durante a aula, que podem mudar completamente os resultados alcançados com as crianças. Por exemplo, consideremos a atividade de comparação de comprimentos abaixo:

FIGURA 1 – Atividade de comparação de comprimentos

Se forem fornecidas réguas com escalas aos alunos, isso os levará, quase sempre, a utilizar a medição dos comprimentos para posterior comparação numérica. Essa pequena decisão didática pode inviabilizar o uso da atividade para promover uma situação em que o aluno compare comprimentos sem medir.

As previsões de estratégias e de possíveis dificuldades auxiliam, igualmente, o professor a escolher novas situações a serem propostas em caso de algumas dificuldades específicas. É nesse sentido, também, que se aponta a importância das atividades complementares normalmente presentes no manual do professor.

A orientação das várias estratégias de resolução e respostas amplia muito a possibilidade de você reconhecer e valorizar as estratégias próprias do aluno.

Além das atividades complementares por unidade, observa-se que algumas obras propõem, periodicamente, projetos interdisciplinares ou mesmo de integração dos vários conteúdos matemáticos apresentados anteriormente. Seus manuais discutem os objetivos desses projetos e como o professor deve orientar os alunos.

Por mais diversificadas que sejam as atividades incluídas em uma obra, é preciso considerar que elas nunca poderão dar conta de toda a nossa variedade sociocultural. Nesse sentido, em muitos momentos, você perceberá a necessidade de adequar essas atividades à realidade dos seus alunos.

Muitas vezes, o contexto de uma atividade é escolhido para auxiliar o aluno a entender a Matemática a partir do conhecimento sociocultural. É comum encontrarmos nos livros a proposta de contagem de janelas de um edifício como exemplo para a multiplicação no caso de uma disposição retangular de objetos. O contexto de prédios altos apropriados para crianças de grandes centros urbanos, porém, é pouco conhecido de crianças de pequenas cidades e, praticamente, desconhecido daquelas que vivem na zona rural. Portanto, não é adequado que o professor utilize tal atividade para contar objetos em uma disposição retangular, ao introduzir a multiplicação. Em casos como esses, cabe ao manual do professor sugerir adaptações das atividades, ou, pelo menos, alertar o docente a respeito da questão. Para crianças da zona rural, a disposição retangular dos canteiros de plantações, por exemplo, pode ser muito mais familiar.

Auxiliar e orientar o professor no processo de sistematização dos conhecimentos também são tarefas que têm sido atribuídas aos manuais. A estes cabe aproximar o conhecimento construído pelas crianças na resolução das atividades, do conteúdo da Matemática estruturada, sistematizada. Esse papel do manual do professor é ainda mais importante quando o livro do aluno não o desempenha. Deve-se mencionar, no entanto, que algumas coleções deixam totalmente a cargo do professor identificar os casos em que a sistematização deve ser feita e elaborá-la.

Orientações quanto à avaliação da aprendizagem

A avaliação da aprendizagem é um dos temas polêmicos na formação do professor. Ele costuma suscitar sempre muitas discussões, visto que avaliar bem a aprendizagem dos alunos é uma preocupação constante de todos os professores. Assim, é indispensável que o manual do professor aborde essa temática e oriente o professor. Entre os tópicos a serem discutidos encontram-se: a necessidade de identificar as funções da avaliação da aprendizagem assumidas pela escola e pelo professor; a definição de quem avalia (se o professor avalia o aluno, se o aluno se autoavalia) e em que momentos se avalia (se em um único momento, se em diversos momentos ao longo do ano letivo, se continuamente); a explicitação dos instrumentos aplicados para coletar os dados usados na avaliação; o detalhamento dos indicadores utilizados para se avaliar; o uso que é feito com os resultados da avaliação; o tipo de retorno dado ao aluno e os instrumentos que auxiliam o trabalho do professor no registro e sistematização da avaliação.

Para que avaliar?

Quem avalia?

O que é avaliado e com que indicadores?

Que instrumentos de avaliação fornecem "esse ou aquele" tipo de dados?

Quando se avalia?

O que se faz com os resultados da avaliação da aprendizagem?

Que retorno é dado ao aluno?

O que se faz com o erro do aluno?

Quais os instrumentos que dão suporte, a quem avalia,

para o registro e organização da avaliação?

Felizmente, hoje, já está superada a concepção de que o único intuito da avaliação da aprendizagem é decidir a aprovação, ou não, dos alunos no ano letivo, ou mesmo classificá-los em bons, médios e ruins. Nesses casos, a avaliação dava-se, simplesmente, por aplicação de um instrumento de avaliação, geralmente uma prova, três ou quatro vezes ao ano. Hoje, entende-se a importância de se avaliar para:

- Diagnosticar os conhecimentos prévios do aluno.
- Acompanhar o desenvolvimento do aluno ao longo do ano.
- Auxiliar o aluno, ou a turma de alunos, em seu desenvolvimento, por meio da proposta de novas atividades.
- Adequar o planejamento das aulas à turma e corrigir possíveis problemas na abordagem adotada.

É nas retomadas dos conteúdos que as coleções, em geral, trazem boas situações para o professor realizar o diagnóstico dos seus alunos. Mas, somente algumas delas indicam, no manual, atividades para esse fim.

É preciso lembrar que, nesse processo, não devemos transformar as avaliações em momentos solenes, que só causam nervosismo e bloqueios. O essencial é conseguir registrar e sistematizar as observações sobre o conhecimento ou o desenvolvimento do aluno. Cada professor sempre avalia seu aluno, mesmo que não tome nota dessas avaliações e, geralmente, altera a sua aula a partir da observação de dúvidas ou de avanços inesperados.

Quando se avalia com o intuito de acompanhar o desenvolvimento do aluno e auxiliá-lo em sua formação, é necessário ter em mente que estamos avaliando se o nosso aluno atingiu os objetivos traçados e o que indicará o seu desenvolvimento. Nesse sentido, temos de explicitar quais os objetivos e indicadores de desempenho que serão utilizados na avaliação. Assim, passamos da preocupação com a nota que o aluno obteve na prova, sem discutirmos o que ela representa, para uma discussão sobre quais habilidades, competências e atitudes o aluno desenvolveu em relação a que conceitos, procedimentos e propriedades matemáticas. É essencial ter claro, que a partir de um mesmo conceito, como a adição, o aluno pode ser capaz de desenvolver diferentes habilidades ou competências. Ele pode conseguir realizar a adição com números naturais até 99, mas não ser capaz de identificar a adição em um problema do tipo:

Tenho 44 anos, sou 26 anos mais nova que minha mãe. Qual é a idade de minha mãe?

É possível, ainda, que esse aluno saiba identificar que tal problema é resolvido por uma adição, mas não tenha desenvolvido a atitude de validar o resultado obtido.

Alguns manuais trazem discussões sobre indicadores que podem auxiliar o professor a traçar um projeto de avaliação da aprendizagem do aluno, o qual leve em conta o uso de diversos momentos e a aplicação de diferentes instrumentos de avaliação. Em geral, a listagem de indicadores do desenvolvimento do aluno é bem grande. Assim, para o seu registro é necessário que o professor tenha à disposição instrumentos que o auxiliem a manter um conhecimento do desenvolvimento do aluno, como o exemplificado a seguir:

Instrumentos / Indicadores	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**...**	Observações
Adicionar números na ordem da dezena, sem reagrupamento								
Adicionar números na ordem da dezena								
Realizar cálculos mentais de adição com números na ordem da dezena								
Resolver problemas de adição como comparação, com números na ordem da dezena								
Validar os resultados das operações realizadas								

Também é importante que, no decorrer de suas aprendizagens, as crianças conheçam os aspectos em que precisam investir mais esforços. É por isso que o retorno das avaliações dado ao aluno e aos seus pais tem cada vez mais se afastado de uma nota, ou conceito, e se aproximado de um parecer sobre o desenvolvimento da criança.

É, também, nesse sentido que reside a importância da autoavaliação. Nesta, o aluno é incentivado a pensar sobre o seu desenvolvimento e a tomar consciência de suas necessidades, o que o leva, muitas vezes, a uma aprendizagem por meio da reflexão sobre o seu erro. As comparações de estratégias de resolução de atividades feitas entre colegas constituem boa maneira de promover o desenvolvimento dos alunos por autoavaliação. Por meio delas, eles têm a possibilidade de explicitar para si próprios quais os conhecimentos que usam. Por exemplo, um aluno pode dominar um algoritmo de uma operação, e somente após a discussão e comparação de estratégias com o colega passar a ter consciência da melhor estratégia e do seu porquê. Como no caso de uma garota de 8 anos que somava os números realizando a contagem a partir de um deles. Para **8 + 3**, por exemplo, fazia:

FIGURA 2: Adição feita a partir do maior número

Essa criança não fazia questão de qual número escolher para iniciar a contagem. Ao ouvir um colega dizer que fazia a contagem tomando o menor número como ponto de partida da contagem, ela descobriu a vantagem de sempre começar pelo maior deles. O colega fazia:

FIGURA 3: Adição feita a partir do menor número

A partir da explicitação do que se quer avaliar, é necessário também pensar qual o melhor instrumento que permitirá a você, professor, coletar as informações que serão usados na avaliação. Muitas vezes, as provas fornecem apenas um resultado final sobre o desenvolvimento do aluno. Esses dados podem ser importantes em alguns momentos, mas nem sempre permitem identificar a dificuldade do aluno. Um exemplo pode ser visto em uma atividade em que era solicitado de um aluno que escrevesse o número dois mil e vinte e quatro usando algarismos indo-arábicos. Inicialmente, o professor avaliou que o aluno não sabia escrever os números em nosso sistema de numeração. No entanto, decidiu repensar a sua avaliação ao ler o protocolo, abaixo, de outro aluno.

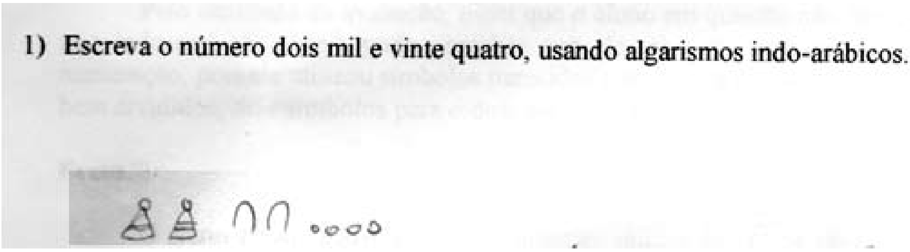


FIGURA 4 – Protocolo de resposta de um aluno da 4ª série (correspondente ao 5º ano)

Ao questionar os dois alunos, ele soube que o primeiro deles não conhecia o significado da palavra "indo-arábico". Já o segundo lhe disse o seguinte: "*ainda não aprendi o que é algarismo indo-arábico, mas como arábico e egípcio fica tudo perto, usei os algarismos egípcios que eu aprendi na 3ª série e esse número é dois mil e vinte e quatro*".

De fato, após a conversa, o professor observou que os dois alunos dominavam o sistema de numeração decimal, apenas não conheciam o termo indo-arábico. Este exemplo é bastante ilustrativo da necessidade de variarmos os instrumentos de avaliação, a fim de podermos observar melhor as diversas competências, habilidades e atitudes dos alunos.

Professor, é preciso lembrar, ainda, que vivemos em uma sociedade em que muitas vezes o cidadão atuará em grupos, e que diversas competências necessárias para esse tipo de trabalho não são desenvolvidas pelo trabalho individual, nem tampouco observadas por instrumentos tradicionais, em que o aluno trabalha individualmente.

Alguns manuais apresentam diferentes instrumentos de avaliação e discutem suas vantagens e desvantagens. Uma boa orientação sobre o que e como avaliar certamente estimulará a reflexão sobre a prática avaliativa, ajudando a melhorá-la. Assim, o ideal é que este tema seja aprofundado nos manuais, com sugestões de práticas avaliativas e discussões sobre os prós e os contras das várias maneiras de se avaliar. Também vale a pena esclarecer os fundamentos teóricos e refletir sobre a viabilidade dessas práticas avaliativas para quem lida com turmas muito numerosas.

Apresentação dos materiais concretos e orientações para seu uso

O uso de materiais concretos tem sido uma tônica nas metodologias mais recentes. No entanto, nem sempre é fácil utilizá-los com o intuito de dar suporte ao desenvolvimento do raciocínio matemático do aluno. O material oferece ao aluno e ao professor um modelo do conteúdo matemático, com o qual o aluno pode realizar operações mentais de forma concreta. Nesse sentido, a orientação para seu uso é importante na condução de uma abordagem efetiva.

O ábaco, por exemplo, se bem utilizado, pode auxiliar o aluno a entender propriedades do sistema de numeração decimal, como o valor posicional, segundo o qual um algarismo assume valores diferentes dependendo de sua posição no número. No entanto, tem sido muito comum o uso de ábacos com cores diferentes para representar cada ordem numérica, o que impede a passagem de uma unidade de uma posição para a outra e dificulta a exploração do valor posicional neste material.

Sugestões de leituras complementares e de aprofundamento para o professor

O manual do professor não deve ser somente um guia do uso da coleção. Mais que isso, o que se espera é que ele auxilie, de maneira efetiva e duradoura, o trabalho do professor. Neste sentido, além das discussões e textos didáticos e teórico-metodológicos, é importante que contenha sugestões de leituras para o docente, endereços de páginas na internet que tratam de assuntos pertinentes à Matemática, além de listas de entidades profissionais, organizações e sociedades voltadas à formação continuada de professores.

As referências bibliográficas utilizadas pelos autores para embasar suas propostas didático-metodológicas também devem ser incluídas. Muitas obras já fazem isso e, entre estas, algumas poucas organizam os títulos para leitura em temas, que são enriquecidos com comentários.

Sabemos que um único manual não pode dar conta de apresentar e orientar o uso de todos os materiais concretos ou de trazer orientações de adequação das atividades a todas as realidades socioculturais brasileiras, por exemplo. Nesse sentido, as indicações de leituras complementares para o professor se tornam imprescindíveis.

Todas as contribuições ao aprimoramento docente são bem-vindas, ainda mais quando as sugestões de livros e periódicos para leitura são atualizadas. Nesse caso, o melhor é privilegiar as publicações recentes, que são mais fáceis de serem adquiridas, caso haja interesse do professor.

Os manuais nos livros de 1º e 2º anos

De maneira geral, os manuais das coleções voltadas ao ciclo da alfabetização matemática precisam aprimorar bastante o apoio didático-pedagógico oferecido ao professor.

Muitas escolhas são feitas nessas coleções, que trazem, em alguns casos suas fundamentações. Questões como: é válido apresentar, no 1º ano, a estrutura do sistema de numeração decimal? Qual o papel dos algoritmos convencionais nessa fase da escolaridade? Devemos introduzir as "noções topológicas" (dentro, fora, entre outras), que já foram enfatizadas durante o "movimento da Matemática moderna" e tinham desaparecido das antigas coleções de 1ª a 4ª série? É o caso de trabalhar tais noções. Como fazer isso? Qual a adequação das atividades ao desenvolvimento psicomotor das crianças nos dois primeiros anos de escolaridade? Devemos ler os enunciados das atividades para a criança?

Ao propor determinados tópicos no livro do aluno, o mais natural é que o autor apresente as razões de suas opções. Isso também é válido para aspectos mais práticos, que ajudem o professor a decidir como tratar a questão da leitura de pequenos textos com os seus alunos ou que o informe sobre as dificuldades motoras da criança dessa idade para recortar, pintar e montar moldes, e o que se pode esperar delas. Você encontrará discussões sobre esses e diversos outros assuntos nos demais capítulos desse livro.

Capítulo 4
A matemática do contexto e o contexto na Matemática

*Verônica Gitirana**
*João Bosco Pitombeira de Carvalho***

A história da Matemática é rica em exemplos que nos mostram como muitos conceitos matemáticos são transmitidos em determinado contexto. Assim, há quase dois mil anos, "professores" hindus já apresentavam problemas com enunciados do tipo: "em uma árvore há 23 macacos, mas eu só consigo ver 15 deles. Quantos estão escondidos?"

A necessidade do ser humano de compreender os fenômenos que o cercam e ampliar, aprofundar e organizar, progressivamente, o seu conhecimento e sua capacidade de intervenção sobre esses fenômenos sempre impulsionou – e impulsiona – a construção do conhecimento matemático. Ou seja, os conceitos e procedimentos matemáticos são construídos na evolução da sociedade, a partir de necessidades do cotidiano, de demandas de outras áreas do conhecimento e também da própria Matemática.

A criação dos números naturais, racionais e irracionais é exemplo da construção das ideias matemáticas em contextos diferenciados. O surgimento dos números naturais é atribuído à necessidade social e histórica de contar. Da mesma forma, a vida em sociedade fez com que os homens precisassem realizar medições – o que deu origem ao número racional.

* Doutora em Matemática. Professora e pesquisadora no Centro de Educação da UFPE, na licenciatura em Matemática e no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica.
** Ph. D. em Matemática. Professor visitante do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRJ.

Desde as civilizações mais antigas, as taxações das propriedades eram feitas com base em medições da terra. Heródoto, historiador grego, que viveu no século V a.C., refere-se às origens da geometria, ao escrever a história dos egípcios:

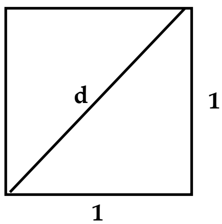
> *Disseram-me que este rei (Sesóstris) tinha repartido todo o Egipto entre os egípcios, e que tinha dado a cada um uma porção igual e retangular de terra, com a obrigação de pagar por ano um certo tributo. Que se a porção de algum fosse diminuída pelo rio (Nilo), ele fosse procurar o rei e lhe expusesse o que tinha acontecido à sua terra. Que ao mesmo tempo o rei enviava medidores ao local e fazia medir a terra, a fim de saber de quanto ela estava diminuída e de só fazer pagar o tributo conforme o que tivesse ficado de terra* (Livro II – Euterpe, apud Caraça, 1952, p. 32).

O relato do historiador revela que os egípcios tinham a necessidade de comparar comprimentos e estabelecer quantas vezes certo comprimento cabia em outro. Assim, eles precisaram definir uma unidade que servisse como padrão de comparação, da mesma forma que hoje temos o metro e a milha, entre outros. Ao responder a pergunta *"Quantas vezes a unidade cabe no comprimento a ser comparado"* surgem os números, sejam os naturais sejam as frações. Estas deram, então, origem aos números racionais.

O número irracional, por sua vez, surgiu em um contexto puramente matemático. Até uma certa fase, questionava-se se os números racionais davam conta de expressar as medidas de qualquer comprimento. Uma das versões históricas da criação dos irracionais é a solução do seguinte problema:

Pode-se expressar a medida da diagonal, d, de um quadrado de lado 1 por um número racional?

Usando o teorema de Pitágoras teremos:



$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

FIGURA 1 – Diagonal do quadrado de lado 1

Assim, resolver esse problema é o mesmo que buscar um número (racional) cujo quadrado seja igual a dois. Na Matemática, demonstra-se que isto é impossível.

O problema da medida da diagonal só faz sentido no contexto da Matemática. Na prática, o ato de medir um comprimento em um objeto ou em um desenho, é sempre possível, e nos fornece, como resultado, uma medida racional.

Como é possível notar, professor, as ideias matemáticas podem ser criadas em diferentes contextos e estes assumem diversos papéis no Ensino Fundamental.

As práticas sociais e econômicas

As contextualizações mais frequentes são as que exploram as relações da Matemática com as práticas sociais e econômicas. Juntamente com os contextos do mundo infantil, como jogos e brincadeiras, são os mais focalizados nas coleções de livros didáticos para os anos iniciais da escolaridade. São exemplos as feiras ou mercados de brincadeira, em que os alunos "compram" e "vendem", com cédulas recortadas dos livros. Quando bem explorada, esta estratégia permite que a criança se familiarize com os vários usos (significados) das operações elementares. A compreensão do que é informado nas contas de gás, luz e telefone, além de socialmente importante, também contribui para a familiaridade com essas operações. Já um contracheque, ou um extrato de conta bancária, permite a contextualização dos números negativos (os débitos ou descontos).

O conhecimento matemático também é trabalhado, com frequência, em contextos socialmente relevantes, como a reciclagem do lixo, o desperdício de água, o valor do salário mínimo, o pagamento em parcelas e os descontos. O seu uso evidencia como a Matemática pode auxiliar a formação do aluno enquanto cidadão, consciente de suas responsabilidades e atento aos problemas sociais do nosso país.

As abordagens das estruturas multiplicativas, do cálculo de volume, e do cálculo com valor monetário são feitas, frequentemente, para conscientizar o aluno sobre diversas situações, entre elas a necessidade de não desperdiçar água, evitando deixar a torneira aberta ao escovar os dentes, fechando-a bem para que ela não fique pingando, evitando lavar calçadas com mangueiras. É muito importante explorar esses temas, que são essenciais à formação do cidadão, levando o aluno a perceber que o conhecimento matemático contribui para que ele se conscientize da situação.

Por exemplo, no caso do desperdício de água causado por uma torneira que pinga constantemente, o professor pode solicitar que o aluno meça quanto tempo ela levará para encher um copo de água de 250 ml. Partindo da situação de proporcionalidade, como um dos significados da multiplicação, o passo seguinte é pedir que o aluno calcule quanto tempo a torneira defeituosa precisará para desperdiçar um litro de água (equivalente a 4 copos). Ainda usando a proporcionalidade, ele poderá ser levado a entender qual será o desperdício em um dia e calcular o desperdício em um mês. O valor monetário desse desperdício também pode ser calculado a partir de uma conta de água ou da exploração do valor cobrado por metro cúbico de água em sua região. É possível, ainda, comparar o volume desperdiçado, obtido nos exemplos anteriores, com o consumo médio de água de uma pessoa em diversas regiões do Brasil. Articulam-se, nesse contexto, as estruturas multiplicativas, as grandezas tempo, volume e valor monetário.

É bom salientar que há nas obras situações em que todos esses contextos são focalizados, sem relacioná-los com a Matemática. Nesses casos, cabe a você, professor, provocar as reflexões necessárias sobre tal relação. Há ainda as situações propostas em que se contextualiza, são feitas as contas, mas não se reflete sobre o significado do resultado no contexto.

O mundo infantil: jogos, brinquedos e literatura infantil

A criança tem um mundo imaginário extremamente rico em contextos. Situações que podem parecer bobas ou sem sentido para o adulto despertam o interesse, a curiosidade e a imaginação da criança. Por isso mesmo, os jogos, os brinquedos, e a literatura infantil são extremamente importantes na contextualização dos conhecimentos matemáticos. Eles exploram o lúdico, a imaginação, o “faz de conta”. Por exemplo, é possível propor jogos de trilha relacionados com a adição e a multiplicação. Jogos tipo "banco imobiliário" podem desempenhar a mesma função, além de envolverem o uso do dinheiro, o que é socialmente importante. Muitas coleções sugerem a confecção de materiais para jogos. Mobilizar os alunos na preparação do próprio jogo é uma prática bastante positiva, pois a atividade favorece o trabalho em grupo e possibilita o enfoque de vários conceitos matemáticos.

Os livros paradidáticos, por sua vez, oferecem vasto campo para a introdução de conceitos matemáticos em situações imaginárias, ricas em cores e conteúdo. Além de terem função no ensino da Matemática, esses livros reforçam a prática da leitura pelas crianças, algo que todo professor deve procurar fazer ao trabalhar os diferentes componentes curriculares. Nas escolas que dispõem de cozinha, livros de receitas para crianças são ótimos para: a prática de medidas de massa, de volume e de capacidade; o uso das frações mais comuns no dia a dia, como um meio, um terço, um quarto, entre outras. Ao mesmo tempo, propiciam o trabalho cooperativo e a aprendizagem de noções de higiene e de segurança. Livros sobre origami, desde que adequados à idade das crianças, contribuem para o seu desenvolvimento psicomotor e permitem o manuseio de formas geométricas em um contexto bem lúdico.

Outras áreas do conhecimento

A formação do aluno envolve o estudo de várias áreas do conhecimento. A importância da articulação entre essas áreas também tem sido apontada nas pesquisas sobre o ensino e aprendizagem da Matemática.

A Geografia humana, ou física, oferece muitas possibilidades de contextualização. Em particular, permite trabalhar com "números grandes", o que ajuda a criança a desenvolver o sentido numérico, extremamente importante. Um mapa do Brasil, com as distâncias entre as capitais, por exemplo, é um excelente contexto para se abordar os números de ordens mais elevadas, por envolverem distâncias de centenas ou de milhares de quilômetros. Dados de produção agrícola, ou industrial, também possibilitam o trabalho com várias unidades de medida, e com o sistema monetário. E mais, familiarizam a criança com a representação decimal de grandezas, por exemplo, ao apresentar a informação de que 1,3 t significa 1300 kg. Em estágios um pouco mais avançados da escolaridade, pode-se trabalhar com produção por hectare, densidade demográfica, regimes pluviométricos, renda per capita, entre outros assuntos. São muitas as possibilidades, como as que envolvem porcentagens, gráficos de colunas, barras ou setores, pictogramas, etc. A leitura do capítulo sobre o tratamento da informação neste livro contém muitas ideias a este respeito.

As diferentes escalas de temperatura, os graus Celsius (º C, ou centígrados) e os graus Fahrenheit (º F), por exemplo, pautam-se nas convenções para definir as temperaturas da água gelada e da água fervente. A escala de temperatura Celsius foi criada com o ponto de congelamento da água correspondendo ao valor zero, e o ponto de ebulição correspondendo ao valor 100, observados a uma pressão atmosférica padrão. Já a necessidade de se medirem as baixas temperaturas, verificadas nos países do norte da Europa, levou o físico e pesquisador alemão Gabriel Fahrenheit (1686–1736) a desenvolver outra escala, a escala Fahrenheit, que toma a temperatura de congelamento da água a 32º F, o que permite que, em países de clima frio, as temperaturas assumam, quase sempre, valores positivos.

A história da Matemática

Antes de mais nada, não podemos nos esquecer de que a noção de tempo histórico se desenvolve muito lentamente nas crianças. Assim, o emprego da história da Matemática nos primeiros anos da escolaridade deve se resumir a noções bem simples, sem tentar localizar os acontecimentos em uma linha do tempo. Se as crianças pequenas têm dificuldades para construir linhas do tempo da vida de seus familiares, como pretender que elas percebam que certos episódios da história da Matemática se deram há dois mil, mil ou quinhentos anos atrás?

Os livros didáticos costumam recorrer à história da Matemática, para:

- exemplificar a evolução dessa ciência, ou como ela é construída historicamente;
- mostrar que diferentes grupos sociais desenvolveram conceitos e procedimentos matemáticos a fim de prover a suas necessidades;

- contextualizar os conceitos, ou procedimentos, inserindo-os nas circunstâncias que acompanharam sua criação e desenvolvimento;
- destacar a significação histórica e cultural da Matemática e suas relações com outras áreas de atividade e do conhecimento.

Os tópicos tratados nas coleções que incluem esse conteúdo são apresentados, em geral, em pequenos quadros, vinhetas ou seções e o assunto mais abordado é, sem dúvida, a história dos números. Incluem-se aí, os antigos sistemas de numeração, egípcio, mesopotâmico, chinês, maia, romano e indo-arábico. São também abordadas as origens de várias unidades de medida de comprimento, muitas delas relacionadas a comprimentos de partes do corpo humano, como cúbito, pé, polegada. Alguns bons exemplos de uso podem ser destacados, como a história de nosso sistema monetário e do sistema métrico decimal, este último tendo evoluído para o denominado Sistema Internacional de Unidades (SI), entre outras. A criação dos aparelhos para medir o tempo também é, por vezes, abordada, e permite a inclusão de ilustrações interessantes e pertinentes nos livros.

Observa-se, no entanto, que na tentativa de criar situações bem contextualizadas para as crianças, algumas obras incluem informações sobre as quais não há evidências de que teriam acontecido. É o caso da história de que os pastores de antigamente faziam marcas, em grupos de dez, para contar seus carneiros. De fato, em um osso, com idade entre vinte mil e dez mil anos atrás, foram encontrados registros de traços grupados de sete em sete, possivelmente correspondentes a um quarto do ciclo lunar. Isso mostra que os primórdios da numeração antecedem de muito a atividade pastoril. Além disso, sabemos que diferentes povos adotaram grupamentos distintos, mas pouquíssimos dentre eles chegaram a sistemas de numeração posicionais: os mesopotâmios, os chineses, os maias, os hindus e os árabes, em épocas diferentes, conforme os registros históricos.

Os egípcios, por sua vez, faziam grupamentos de 10 em 10, enquanto os romanos de 5 em 5, e assim por diante. Percebe-se que a singularidade do sistema de numeração decimal não está no fato de que ele grupa unidades de 10 em 10. O que o distingue é que, nele, a posição de um algarismo no número determina quanto vale o algarismo.

Quando o sistema de numeração indo-arábico é abordado, umas poucas coleções de livros didáticos mostram a evolução dos algarismos ao longo do tempo, até chegarem à forma que usamos hoje, sem citar datas. Algumas coleções pedem que os alunos registrem números nos sistemas egípcio, romano, maia e chinês. Essa atividade pode ser interessante quando seu objetivo é que o aluno, por meio da comparação com o nosso sistema, entenda as características do sistema de numeração indo-arábico. No entanto, só faz sentido levar o aluno, em nossas escolas, a aprender a escrever números nos sistemas antigos que ainda são utilizados socialmente, como o sistema romano.

Além da história dos sistemas de numeração, algumas coleções também abordam a evolução das medidas de grandezas, em particular, as medidas de tempo, feitas com clepsidras, ampulhetas, velas e vários tipos de relógio, assim como de instrumentos de cálculo, como ábaco e calculadoras mecânicas. Trazem, ainda, a história do tangram.

O número zero é mais um dos tópicos contextualizados nas obras. Em algumas delas, afirma-se que a origem deste número remonta aos mesopotâmios, ou aos fictícios pastores que já teriam criado grupamentos de dez em dez para contar suas ovelhas. Na verdade, não existe comprovação histórica de que o zero fosse conhecido antes de 600 d.C., aproximadamente. Sabe-se mesmo, pelos registros deixados, que os mesopotâmios não conheciam o zero. É certo que, mais de mil anos antes desta data, os mesopotâmios já usavam um símbolo arredondado para denotar uma casa vazia, na representação de seus números. Mas este símbolo não era um número, não se operava com ele. Tudo indica que foram os hindus, em torno de 600 d.C., que criaram o zero como um *número*, com o qual podemos operar livremente, como fazemos com os outros. O surgimento desse número é considerado por alguns estudiosos como uma das maiores criações da humanidade.

A própria Matemática como contexto

Um vasto campo para a contextualização dos conceitos e procedimentos matemáticos são os próprios campos da matemática escolar: *números e operações; geometria; grandezas e medidas*; e *tratamento da informação*. As diferentes grandezas e suas características, por exemplo, oferecem excelentes contextos para a introdução e extensão dos campos numéricos. O trabalho com a grandeza temperatura, por sua vez, é bem interessante para que a criança amplie os significados assumidos pelos números e entenda o zero como o número corresponde à origem em um eixo e não somente como inexistência e "guardador de lugar". Conhecimento que auxiliará, em anos posteriores, a introdução dos números negativos.

A contabilidade bancária, no período do Renascimento (entre os séculos XIV e XVI), foi um dos primeiros contextos de uso dos números negativos, pois naquela época, as medidas de grandezas com valores negativos eram desconhecidas. Estas só se generalizaram a partir do século XIX, com a Revolução Industrial, e a necessidade de se usarem medidas mais precisas de muitas grandezas, especialmente as temperaturas. Até então, as temperaturas eram aproximadas ou dadas por comparação, como: "faz tanto frio que a água do lago congelou"; "está tão quente que a manteiga derreteu". Isso porque, os processos industriais não necessitavam de temperaturas muito baixas, que hoje diríamos estarem abaixo de 0º C.

Contextualizações que articulam dois campos da Matemática já são bastante utilizadas nos livros, como a formação retangular para discutir a multiplicação e também a propriedade comutativa dessa operação.

Além disso, diversas sequências numéricas são utilizadas na marcação de medidas de tempo, e mesmo em instrumentos de medida de tempo, como o relógio, que traz uma marca dos minutos de 5 em 5. Esta sequência pode também ser articulada com a divisão do ângulo de 360°, em 12 horas, tempo medido por uma volta completa do ponteiro das horas do relógio analógico. Tal divisão nos diz que o ponteiro das horas "anda" 30° a cada hora. Por seu turno, o ponteiro dos minutos leva 60 minutos para uma volta completa (360°), e por isso "anda" 6° a cada minuto. O ponteiro dos minutos percorre, então, em 5 minutos, o mesmo ângulo de 30° que o ponteiro das horas percorre em uma hora. Assim, temos uma articulação importante entre o estudo da grandeza tempo, das estruturas multiplicativas, e do ângulo e sua medida.

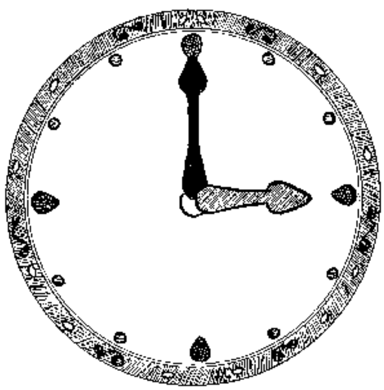


FIGURA 2 – Relógio

Os materiais concretos como fonte de contexto

O emprego de materiais concretos no desenvolvimento de conteúdos já é uma forma de contextualização. Assim, por exemplo, o material dourado pode ser interpretado como uma contextualização para a estrutura de nosso sistema decimal de numeração. Essa discussão é aprofundada e pode ser mais bem entendida na leitura do capítulo *A metodologia de ensino e aprendizagem nos livros didáticos de Matemática,* deste livro, quando se trata dos materiais concretos como recurso metodológico.

O contexto como fonte de significados

O recurso às contextualizações pode dar oportunidade à criança para identificar, mais facilmente, diferentes significados dos conceitos matemáticos em diversas situações, como: o uso das temperaturas em que o zero assume o significado de uma convenção e que pode motivar a necessidade dos números negativos; o emprego da balança de pratos, que auxilia o início do estudo de equações do primeiro grau, no qual a igualdade assume o significado de equilíbrio.

No estudo das estruturas aditivas e multiplicativas, por exemplo, utilizam-se contextos diversos para os diferentes significados da adição, da subtração, da multiplicação e da divisão. Nesse sentido, o importante não são os contextos em si mesmos, mas o significado que o conceito matemático assume em cada um deles. As situações da combinatória, um dos campos da Matemática, são fonte importante para relacionar um dos significados da multiplicação, com problemas de contagem de possibilidades. A disposição retangular dos objetos, tópico da geometria, também pode ser tratada como um dos contextos essenciais na atribuição de significados da multiplicação. As comparações entre grandezas de mesma espécie, tanto as comparações aditivas quanto as multiplicativas, também definem significados fundamentais, da adição e da multiplicação.

O conhecimento prévio na aprendizagem da Matemática

O conhecimento que a criança já possui, a partir das experiências de seu meio social, e do que aprende em outras áreas, ou na própria Matemática, tem servido como âncora para que ela construa o conhecimento matemático.

Possibilitar que os alunos expressem os conhecimentos sobre as estratégias de cálculo que fazem mentalmente pode auxiliá-los a perceber os diferentes algoritmos, assim como as propriedades das operações que utilizam em tais procedimentos.

Em várias profissões, os conhecimentos matemáticos são utilizados em muitas situações, mesmo se seus usuários não tenham consciência da dimensão matemática de sua atividade. O aluno, muitas vezes, já tem contato social com essas ações. Por exemplo:

Um pedreiro, em seu cotidiano de trabalho, precisa alinhar as vigas de uma laje para que todas fiquem dispostas paralelamente. Mas como ele faz isso?

Foto: Verônica Gitirana

FIGURA 3 – Alinhamento de vigas

A imagem da Figura 3 mostra que, no caso, o pedreiro utilizou o comprimento do bloco para garantir que, no início, meio e fim das vigas, fosse mantida a mesma distância entre elas, para que ficassem paralelas. A recuperação e a valorização desse conhecimento social podem auxiliar o aluno a entender o paralelismo como algo que conserva a distância entre as duas linhas.

As ruas paralelas e transversais também têm sido uma fonte muito utilizada para se apresentar ao aluno a noção de retas paralelas ou transversais. No item que trata das *Adequações e naturalidade do contexto,* desenvolvido mais adiante, são discutidos alguns cuidados a serem tomados com tal contextualização.

O uso de contextos variados faz com que possamos aproximar o significado de um procedimento matemático normalmente já realizado pelo aluno. Desta forma, a contextualização serve de paralelo para que o aluno compreenda a Matemática. A articulação entre os campos da Matemática tem sido muito utilizada com este fim.

O conhecimento que o aluno possui de brincadeiras, como a gangorra, pode auxiliá-lo a entender a comparação entre massas. O jogo da amarelinha contribui para que ele compreenda a ordenação numérica, crescente e decrescente. A brincadeira de par ou ímpar, tão comum no cotidiano da criança, pode ser uma fonte para a discussão do zero, como é comentado no capítulo de *Números e operações*, deste livro, e pode ajudar na classificação do número em par ou ímpar.

A observação das janelas de prédios, da disposição retangular dos canteiros em uma plantação, ou das cadeiras em uma sala ou auditório, auxilia o aluno a entender a multiplicação. Do mesmo modo, pode ser utilizada para que seja discutida a propriedade comutativa da multiplicação – linha por coluna ou coluna por linha. E não é só! Os diferentes contextos podem ajudá-lo, professor, a discutir as diversas soluções possíveis de um mesmo problema matemático. Por exemplo:

Indique qual é o próximo número da sequência:

6 , 12 , 18 , 24 , ...

Se o aluno pensar no intervalo das horas para tomar um antibiótico, o próximo número será 6, pois como o dia tem 24 horas, a sequência recomeça. Se pensar nos múltiplos de 6, o próximo será 30. Assim, a variação do contexto facilita entender por que uma questão desta natureza não pode ter resposta única.

Ao procurarmos trazer o conhecimento prévio do aluno para auxiliar a introdução de um novo conteúdo matemático, é imprescindível que o contexto seja do conhecimento deste aluno, ou ao menos, que você, professor, o tenha estimulado a investigá-lo anteriormente. Portanto, nessa função, procure adaptar os contextos à realidade e conhecimento dos seus alunos. Para recorrer à disposição retangular, não adianta referir-se às janelas de um prédio para o aluno da zona rural, que praticamente não convive com este tipo de construção. Sabemos, também, que ele tem outros contextos mais apropriados para tal disposição retangular.

A Matemática auxiliando a entender conceitos do contexto

Assim como o entendimento de diversos conceitos de outros contextos é importante para a compreensão da Matemática, no sentido oposto, os conceitos matemáticos auxiliam o aluno a também compreender melhor, conceitos, procedimentos e instrumentos em outras áreas da atividade humana.

O conceito matemático de razão, por exemplo, é essencial no entendimento da ideia de escala utilizada em mapas geográficos, e na produção dessas representações. Na construção de um mapa, ou de uma planta-baixa (da arquitetura ou engenharia), define-se uma razão entre os comprimentos no desenho e os comprimentos reais – a esta razão dá-se o nome de escala. Neste caso, a noção de semelhança entre figuras, tão importante na geometria, ajuda a entender por que as plantas e os mapas guardam a mesma forma daquilo que eles representam. A explicação vem do fato de mantermos constante a escala (razão entre os comprimentos no desenho e os comprimentos reais). A noção de razão também é muito importante na definição de diversas taxas da Física, como velocidade, densidade, e da Geografia, como a densidade demográfica, entre outras.

As noções de porcentagens da Matemática e de juros da Matemática financeira são muito úteis para a vida cidadã, principalmente na tomada de decisões e conscientização a respeito das compras a vista e a prazo. Como na situação em que é preciso decidir em qual loja é mais vantajoso comprar a mesma televisão, a partir das propagandas da figura abaixo.

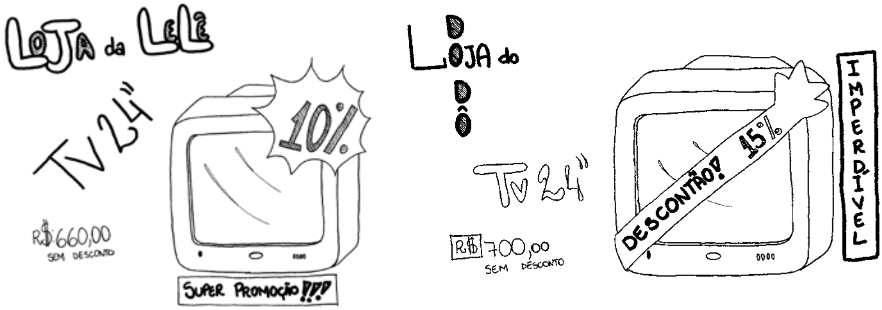


FIGURA 4 – Propaganda de Lojas de Televisão

E mais, o conhecimento matemático e sua contextualização contribuem bastante para que o aluno amplie o leque de seus conhecimentos. Nessa mesma direção, é importante utilizar o conhecimento matemático para auxiliar a criança a entender como funcionam certos artefatos, ou diminuir a distância entre os usuários e aqueles que pensam e elaboram os instrumentos.

Atualmente, essa distância é cada dia maior. Muitos vendedores, em uma loja, utilizam programas fechados com planilhas e apenas podem incluir os dados e não têm a menor ideia de como tais programas funcionam. Aproximar o jovem da tecnologia e do conhecimento necessário para explicar alguns elementos elaborados deve ser uma das funções da contextualização. Estreitar essa distância é essencial para a formação dos cidadãos que, muitas vezes, se enganam comprando diferentes produtos que têm a mesma aplicação.

Cidadania, ética e observância dos preceitos legais

Na abordagem dos conteúdos, as obras de Matemática, como as dos outros componentes curriculares, devem preocupar-se com a cidadania, não apresentar preconceitos de qualquer natureza, respeitar os preceitos decorrentes da Constituição e de vários outros estatutos legais. As contextualizações empregadas, sobretudo as que envolvem as práticas sociais, podem propiciar boas ocasiões para ressaltar a ética e o respeito às diferenças.

A Matemática é uma atividade humana e, como tal, profundamente inserida no contexto social em que é produzida. A par disso, as formações matemáticas dos alunos e dos próprios professores ocorrem em instituições mergulhadas no contexto sociocultural e histórico de uma região e de um país. E mais, o livro didático, que é portador das concepções de seu autor, também sofre as influências de todo o contexto antes referido. Por tudo isso, não podemos esperar que no ensino escolar de Matemática, inclusive nas obras didáticas, não se façam presentes as marcas ideológicas, políticas, sociais e culturais de nosso contexto. E, muitas vezes, tais marcas traduzem-se em estereótipos ou preconceitos que devemos procurar desvendar e evitar, o que é uma tarefa difícil e complexa.

Em Matemática, ao longo dos últimos anos, aos poucos, as coleções didáticas se preocuparam mais e mais com a diversidade dos tipos étnicos brasileiros e deixaram de considerar somente a família tradicional, em que o pai é o provedor dos recursos, a mãe se ocupa da casa e da educação dos filhos e os avós figuram como personagens benévolas, sempre a brincar com as crianças. Faz-se igualmente mais e mais presente a consideração das contribuições das etnias indígenas e dos descendentes de africanos para a formação da sociedade brasileira. O mesmo pode ser dito em relação à valorização do papel da mulher em nossa sociedade.

Nas coleções que se pretendem “neutras”, que não abordam ativamente estas temáticas, caberá ao professor intervir, e suscitar discussões e posicionamentos sobre as mesmas. Não faltam oportunidades para isso, principalmente nas atividades que contextualizam os conteúdos matemáticos no mundo social, físico ou econômico. As possibilidades são inúmeras. A única dificuldade para o professor será selecioná-las, visto serem realmente muito numerosas. Por exemplo, dados sobre o número de pessoas com problemas de saúde devidos ao álcool ou ao fumo podem propiciar um bom trabalho sobre a necessidade de se evitar o fumo e o álcool, e dar origem a várias atividades com gráficos e porcentagens. Algo semelhante pode ser feito em relação aos cuidados que se deve ter com o uso do automóvel, trazendo para discussão os números de mortos e acidentados no trânsito em ruas e estradas. Já relacionado com o emprego maciço de carros e caminhões no Brasil, podem-se discutir problemas do meio ambiente, do que pode acontecer quando o petróleo não estiver mais disponível, entre outros.

Lembramos que cidadania, civilidade, respeito ao outro, cuidado com os bens públicos, consciência de que a sociedade é formada por pessoas de variadas etnias, religiões, convicções políticas e ideológicas se aprende na prática e que o exemplo do professor é fundamental. Vale ressaltar a importância do trabalho em grupo para o desenvolvimento da cidadania. A sala de aula não é só um local para a aprendizagem da Matemática, e na interação entre os alunos, propiciada e mediada pelo professor, podem consolidar-se práticas sociais extremamente importantes para o exercício da cidadania.

Adequação e realismo do contexto

A importância da contextualização para o ensino e aprendizagem da Matemática está mais do que evidente. No entanto, contextualizar o conhecimento, nem sempre é tarefa fácil. A própria didatização do contexto o transforma, naturalmente, em um contexto artificial.

O problema dos macacos na árvore, com o qual iniciamos este capítulo, por exemplo, claramente, não é um problema prático, pois se trata de uma situação didatizada e que não se vivencia. O que se visa com ele é mostrar que a adição pode ser aplicada a problemas de estrutura idêntica e a mobilizar a habilidade de cálculo do aluno.

Este problema é semelhante ao seguinte, que poderíamos encontrar, hoje, nos livros didáticos de Matemática para os dois primeiros anos do Ensino Fundamental:

Eu tenho 24 bolas de gude, vejo 15 delas no chão e o restante está no meu bolso. Quantas estão no meu bolso?

Além disso, por vezes, nas obras analisadas, as contextualizações limitam-se apenas a dar informações que podem ser curiosas, mas não são significativas para a aprendizagem, ou servem apenas de pretexto para a obtenção de números que serão usados nas operações matemáticas. Observe um exemplo disso, na seguinte atividade:

Para saber quantos anos Pedrinho tem, some os números pares de sua bermuda com os ímpares de sua capa e divida o resultado pelo menor dos ímpares da bermuda.

FIGURA 5 – Problema de contexto artificial

Os problemas anteriormente citados, sobre o número de macacos ou de bolas de gude são simples, e a criança pode resolvê-los usando somente representações pictóricas para os macacos ou as bolas de gude. O último, referente aos números que decoram a roupa de Pedrinho, é de outro nível, pois o fato de pendurar números nas roupas não lhes confere um significado. Nem tampouco atribui significado aos pares e ímpares. Aqui, estamos lidando, claramente, com outro grau de artificialidade.

Uma dificuldade na contextualização surge quando a utilizamos com o objetivo de usar o conhecimento prévio para ajudar o aluno a entender melhor a Matemática. Nesses casos, o contexto não pode ser desconhecido da criança. Para contextualizar um dos significados da multiplicação, há várias possibilidades interessantes, como: o exame de uma planta de um teatro que mostre a localização de suas poltronas, a contagem das janelas de um prédio alto, dispostas regularmente andar por andar, ou ainda a observação dos canteiros de hortaliças desenhados organizadamente em uma plantação, ou mesmo de um pelotão de soldados desfilando. Entre estes exemplos, o do prédio alto será mais artificial, fará muito menos sentido, para uma criança da zona rural do que o exemplo dos canteiros de hortaliça. E este terá menos sentido para uma criança da grande capital do que aquele que apresenta as janelas do prédio. No entanto, se a função do contexto for expandir e aprofundar o conhecimento das crianças sobre o contexto, tudo se inverte. Para a criança da zona rural, o prédio será importante e, para a do grande centro urbano, as plantações é que o serão.

Mais um cuidado ao trabalharmos com contextualizações é o de procurar sempre trazer situações em que os valores numéricos envolvidos tenham a ver com a realidade. Muitas vezes, quando a criança utiliza o senso crítico ela é considerada indisciplinada. Como ocorreu no exemplo mostrado abaixo, em que uma criança foi chamada a responder a seguinte questão:

Tia Maria tinha 25 melancias, comeu 18. Com quantas melancias tia Maria ficou?

A criança respondeu:

"*Não importa! Acudam tia Maria!*
Ela morreu ou está passando mal."

Muitas vezes, o descuido em fazer corresponder os valores reais do contexto e os valores tomados no problema leva o aluno a não buscar utilizar o senso crítico da realidade para dar sentido à resposta de problemas da matemática escolar. Principalmente, em situações em que a resposta e a realidade são incompatíveis, como por exemplo:

A idade do pai somada com o dobro da idade do filho é 160 anos e as duas somadas é 140 anos. Quais as idades do pai e do filho?

Observa-se que a solução do problema anterior implicaria um homem de 120 anos ser pai de um filho de 20 anos. Isto torna a situação bem longe da realidade. Se o aluno chegar a uma resposta matematicamente correta, e buscar validá-la com a realidade, desconfiará que seu cálculo está errado.

É preciso cautela, ainda, para que não sejam criadas dificuldades para a aprendizagem. Todo contexto que oferece um modelo para um conceito, procedimento ou algoritmo matemático tem seus limites de validade. Um exemplo recorrente em algumas coleções é o de se introduzir o conceito de retas paralelas, um dos mais básicos da geometria, com base na ideia de "ruas paralelas" em uma cidade. É necessário que se discutam os limites dessa correspondência e a diferença entre o significado matemático do termo "paralela" e o seu significado no contexto do cotidiano. Essa dificuldade é agravada, também, quando se opta por introduzir, primeiramente, o conceito de segmentos paralelos – novamente com base nas "ruas paralelas" – para, em seguida, definir retas paralelas. Nesse caso, o correto é adotar-se a ordem inversa: primeiro, o conceito de retas paralelas e, depois, o de segmentos paralelos. Caso se defina, como se lê em alguns livros, que segmentos paralelos são aqueles que não se encontram, comete-se um erro. Por exemplo, os segmentos ***AB*** e ***CD***, da Figura 6, não se encontram, mas eles não são paralelos.

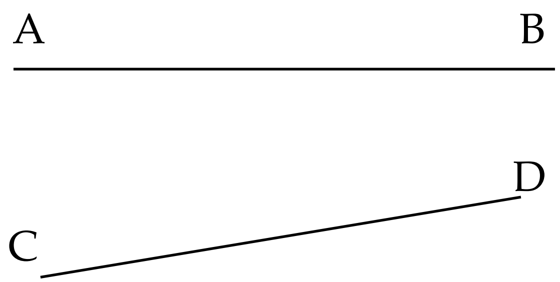


FIGURA 6 – Segmentos não paralelos que não se encontram

É melhor, então, definir primeiro o que são retas paralelas, como retas coplanares que não se encontram e, em seguida, dizer que segmentos paralelos são aqueles que determinam retas paralelas. Isso porque, em geometria, procura-se passar, aos poucos, de conhecimentos intuitivos, de "lições de coisas", como se dizia antigamente, para um conhecimento estruturado. E este último, se organiza exatamente em torno das noções de ponto, reta e plano. Assim, devemos, bem cedo, acostumar o aluno com estes conceitos básicos. Lembramos também que as ruas que, comumente, denominamos de paralelas, nem sempre podem ser representadas por segmentos paralelos, pois, se estes fossem prolongados eles se encontrariam. Também acontece, em muitas cidades, duas ruas serem denominadas de paralelas na linguagem da população local e não serem representações de segmentos de reta, por conterem trechos curvos. Por exemplo, é o que acontece, no Recife, com a Rua Monsenhor Fabrício, que é conhecida, popularmente, como paralela à Av. Caxangá. Mas, se observarmos o croquis abaixo (Fonte: http://maps.google.com.br; escala não especificada) vemos que a Rua Monsenhor Fabrício possui trechos não retilíneos:

FIGURA 7 – Mapa de ruas conhecidas como paralelas

Em suma, uma contextualização produz um modelo para o conceito matemático que tem suas limitações. Assim, é preciso muita atenção às situações em que o contexto se afasta das noções e procedimentos matemáticos.

Outro exemplo típico disso ocorre quando se utilizam objetos que são modelizados pelas noções dos sólidos e das figuras geométricas planas como contextos para essas noções. Por vezes, são cometidas impropriedades ao se tentar contextualizar o conceito de sólido geométrico utilizando-se objetos do dia a dia, como caixas, bolas, latas de óleo de cozinha. Em particular, a introdução da nomenclatura "sólidos que rolam" – aqueles que possuem superfícies curvas – e "sólidos que não rolam" – os que só possuem superfícies planas – acarreta problemas, pois tal nomenclatura é artificial e, principalmente, pode levar a noções errôneas. É comum dizer que um dado rola, por exemplo. Além disso, vários objetos, inclusive do mundo infantil, com superfícies curvas não rolam, como mostra a figura abaixo:

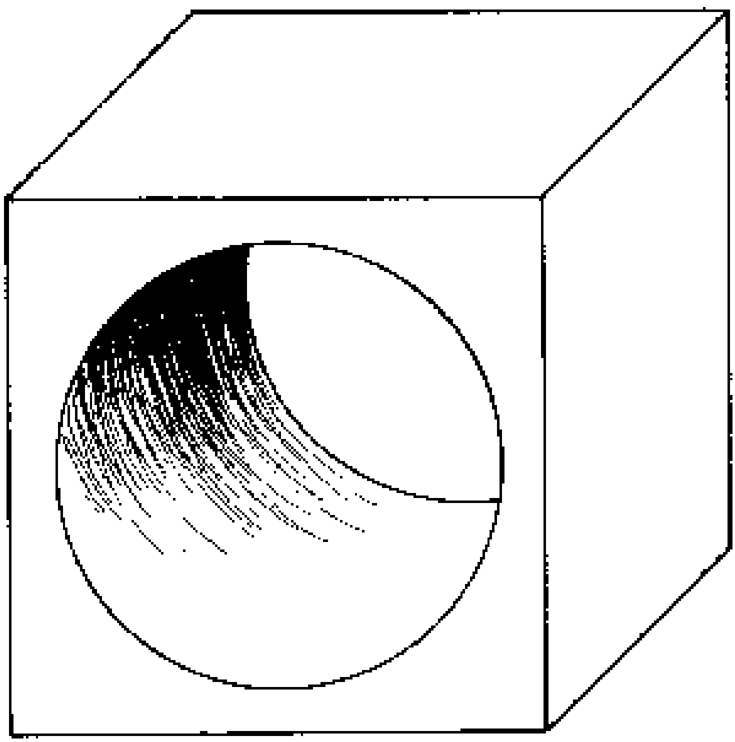


FIGURA 8 – Bloco com superfície curva que não rola

A categoria dos "corpos redondos" é tradicional. Já é encontrada em um dos grandes clássicos do ensino da geometria, o tratado *Elementos de Geometria*, de Legendre, escrito nos últimos anos do século XVIII. Ele engloba na categoria dos "corpos redondos", a esfera, o cilindro e o cone, no que foi seguido por autores posteriores. "Corpos redondos" é, simplesmente, uma categoria para englobar sólidos importantes, que devem ser estudados, mas que não são poliedros. Sem tentar introduzir classificações artificiais, é possível, simplesmente estudar os três "corpos redondos" e salientar que eles não são poliedros, pois não estão limitados exclusivamente por polígonos planos.

Considerações finais

As coleções de livros didáticos de Matemática procuram contextualizar os conteúdos de várias maneiras:

- Nas práticas socioeconômicas, em situações de compra e venda, ou que envolvem salários e contas de serviços, entre outras, buscando relacioná-las a circunstâncias que favorecem o desenvolvimento crítico e responsável do cidadão.
- No mundo infantil, por meio de jogos, brinquedos e da literatura infantil.
- Em outras áreas do conhecimento, especialmente, Geografia, Física, Arte, Química, Astronomia, Economia; etc.
- Promovendo a relação entre os campos da Matemática.
- Por meio da história da Matemática e em situações culturais.
- Com o apoio de materiais concretos.

Entre as funções assumidas pelo contexto nas situações de ensino e aprendizagem da Matemática, é possível listar as seguintes:

- Possibilitar que os alunos mobilizem os conhecimentos prévios para entender melhor um conteúdo matemático.
- Favorecer a identificação de outros campos de uso da Matemática.
- Contribuir para a ampliação dos significados que um conteúdo matemático pode assumir.

- Auxiliar a criança a desvendar os conhecimentos que estão por trás do funcionamento dos objetos.
- Permitir que o aluno entenda a Matemática como uma ciência em evolução e que possui aspectos culturais.
- Auxiliar na formação de um cidadão crítico e consciente.

Não há dúvidas de que a contextualização dos conteúdos matemáticos é fundamental. Mas nem sempre é fácil desenvolvê-la a contento. É preciso evitar contextualizações artificiais ou aquelas que não cumprem uma função significativa na melhoria do ensino e aprendizagem.

Capítulo 5

Os livros paradidáticos para o ensino da Matemática

*Verônica Gitirana**
*Gilda Lisbôa Guimarães***
*João Bosco Pitombeira de Carvalho****

Pelo menos nas últimas quatro décadas, o livro didático deixou de ser o único apoio ao trabalho de sala de aula. Na área de Matemática, o que era uma tendência se intensificou, nos anos mais recentes, com a ampliação do movimento da Educação Matemática no país. Assim, especialmente nos primeiros anos da escolaridade, o professor tem à sua disposição, hoje, diversos recursos didáticos que buscam favorecer as situações de aprendizagem.

O uso desses recursos oferece contextos em que conceitos e procedimentos matemáticos podem ser bastante explorados. Alguns deles, como os materiais didáticos de manipulação, permitem que o aluno realize concretamente os procedimentos matemáticos. O material dourado, por exemplo, tem sido muito útil para ajudar a criança a entender a ideia dos agrupamentos (base 10) e trocas, quando está aprendendo a escrita dos números.

Os jogos, brinquedos infantis e populares, igualmente, trazem para o ensino a possibilidade de explorar conhecimentos matemáticos em contextos próprios do mundo infantil. Além disso, a partir

* Ph. D. em Educação Matemática. Professora e pesquisadora no Centro de Educação da UFPE, na licenciatura em Matemática e no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica.

** Doutora em Psicologia Cognitiva. Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco.

*** Ph. D. em Matemática. Professor visitante do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRJ.

de 2010, o Programa Nacional do Livro Didático incluiu os livros complementares, ou paradidáticos, entre os recursos didáticos destinados às turmas de 1º e 2º anos do Ensino Fundamental. Entre eles, há várias obras que exploram ou servem como subsídio para o professor trabalhar a Matemática com seus alunos.

> Os paradidáticos se compõem de livros de histórias infantis, cujos enredos atribuem significados a conceitos matemáticos. Também existem as coletâneas de lendas e parlendas, de sugestões de brincadeiras, e outras que trazem propostas de experimentos e de uso de materiais didáticos.

Professor, ao ler uma “historinha” é possível criar situações em que a criança seja chamada a intervir, dar opiniões, antecipar o desfecho de uma trama, além de exercitar a sua criatividade para propor novos finais ou recriá-las. Após essa leitura, o aluno pode ser mobilizado para identificar conceitos e discutir procedimentos matemáticos.

A Matemática e os livros complementares

Professor, você e seus alunos só terão a ganhar se os livros complementares forem utilizados para contemplar conteúdos, significados ou abordagens pouco comuns nos livros didáticos.

A leitura das histórias traz para o professor e para o aluno contextos em que os *números* aparecem em seus diferentes significados. Usam-se os números para contar objetos, para medir área, tempo, massa (peso), criar sequências e codificar. São empregados contextos naturais, como histórias infantis, cantigas, parlendas, experimentos e receitas. A ordenação crescente e decrescente também aparece com diferentes significados nas obras. O sistema de numeração decimal é, igualmente, contemplado e encontram-se obras com situações em que as operações adquirem sentido.

No campo das *grandezas e medidas*, há boas obras que valorizam uma abordagem intuitiva. A importância do estabelecimento de um referencial tem sido um ponto explorado: saber que o grande pode ser pequeno, dependendo do referencial. Uma criança de sete anos se acha grande (alta) perante uma de quatro anos, mas, se considera pequena (baixa) quando comparada com seus pais.

Comparar grandezas sem usar seus aspectos numéricos, ou seja, suas medidas, permite abordagens intuitivas de grandezas pouco exploradas, como ocorre em experimentos com temperatura. Mesmo sem usarmos um termômetro, podemos comparar as temperaturas da água de dois recipientes, com água fria e morna, respectivamente. Para isso, basta colocarmos a mão em um deles e, em seguida, no outro.

Os paradidáticos também trazem histórias que incentivam os alunos a medir diferentes grandezas com o uso de unidades de medida não-convencionais. Partindo delas, professor, é possível propor situações similares em que os alunos busquem soluções próprias. Por exemplo, adotando uma grandeza como unidade, tal como a área da capa de um caderno, para medir e comparar a área do tampo de duas mesas ou carteiras escolares.

O **pensamento geométrico** surge da interação espacial com os objetos e os movimentos no mundo físico e desenvolve-se por meio das competências de localização, visualização, representação e construção de figuras. Com os paradidáticos, você terá a oportunidade de oferecer às crianças histórias em que elas possam observar figuras planas. Assim, após a leitura das histórias, promova situações para que elas observem as figuras por meio dos objetos do mundo físico como modelos, além de sugerir que elas criem novas histórias e produções artísticas com essas figuras.

Deixar a criança cortar em papel as figuras planas auxilia a compreensão de como ela está percebendo cada figura.

Alguns livros complementares propõem construções de figuras geométricas por mosaicos de figuras, dobraduras e construção de brinquedos. Vale a pena discutir algumas características das figuras, além de deixar a criança gerar suas próprias estratégias de obtenção das mesmas. Também há obras que se caracterizam como livros de imagens, as quais permitem uma discussão bastante rica do tema de localização, com destaque para as posições relativas.

Outras propiciam a discussão da representação plana de objetos e de como eles são vistos em relação à distância em que estão do observador.

São ainda poucas as obras que contemplam o *tratamento da informação*, por ser este um campo ainda recente na matemática escolar. No entanto, várias das obras sugerem experimentos a partir dos quais você pode propor aos alunos a organização dos resultados em tabelas e gráficos para uma melhor observação e análise.

Riqueza de textos e ilustrações

Ao trabalhar com os paradidáticos, sugerimos que você busque explorar a variação dos **tipos de textos** oferecidos: histórias infantis; sugestões de experimentos, textos do folclore, de receitas, de dobraduras e de construções de brinquedos; livros de imagens; poemas; adivinhas; quadrinhos, entre outros.

Nas **histórias infantis**, os conteúdos matemáticos são acompanhados de ilustrações relevantes. Textos e imagens possibilitam que a criança se envolva com a Matemática, ao mesmo tempo em que lê, ou ouve e acompanha a leitura. Uma atividade interessante com esse tipo de livro é a criação de novas histórias com base nas que foram lidas. Por exemplo, na contagem regressiva, é possível incentivar os alunos a criarem histórias em que os fatos são organizados de forma a se chegar ao ponto inicial de um processo.

As **coletâneas**, diferentemente dos livros de histórias, são obras em que o professor e aluno podem selecionar uma imagem, uma receita, uma parlenda, uma cantiga, um experimento, um brinquedo, uma dobradura, para serem trabalhados em sala de aula.

Uma boa exploração dos conteúdos matemáticos dependerá de seu planejamento e da preparação antecipada do material necessário para trabalhá-los. Não se invalida, porém, que os alunos também folheiem esse tipo de livro e o leiam, e mesmo participem da preparação dos materiais que serão utilizados. Mas, atenção! Especialmente na realização dos experimentos, você deve ter cuidado com a segurança das crianças.

Contextualização, interdisciplinaridade e cidadania

As obras propiciam o desenvolvimento de outros aspectos que vêm sendo defendidos na abordagem da Matemática para os anos iniciais. Os conceitos relevantes para a formação matemática devem ter **abordagem intuitiva desde o início da formação escolar**. Tal ponto de vista apoia-se na concepção de que a construção de um conceito processa-se no decorrer de um longo período, dos estágios mais intuitivos aos mais formais.

No desenvolvimento dos conteúdos, é muito importante que você, professor, respeite o processo de cada criança, possibilitando que ela tenha um primeiro contato com tais noções, mas sem desestimular a aprendizagem. Isso não significa que os conceitos não devam ser tratados com precisão. Ao contrário! O que se ressalta é que, de fato, não é necessário exigir formalismo por parte da criança.

Com o objetivo de favorecer a atribuição de significados aos conteúdos matemáticos, mais dois princípios assumem particular destaque: o da **contextualização** e o da **interdisciplinaridade**. É nesse sentido que muitos paradidáticos trazem situações que articulam, naturalmente, os conceitos e procedimentos Matemáticos com os conhecimentos de outras áreas. As representações do espaço, por exemplo, são abordadas em obras que defendem a preservação da natureza e exploram a biodiversidade.

As grandezas e suas medidas, principalmente físicas, são estudadas em conexão com os conceitos da área de Ciências; a articulação entre a geometria e as grandezas geométricas surge, naturalmente, na construção de objetos artísticos e do imaginário infantil. Os números e seus significados são bem articulados com cantigas e parlendas. Sem esquecermos a articulação natural da Matemática com a arte e com a língua portuguesa que esse tipo de material propicia.

Outro rumo de reflexão é o que indaga sobre o papel do ensino da Matemática na **formação do cidadão**. As obras complementares trazem bons questionamentos que estimulam o respeito à variedade de pontos de vista e aos contextos em foco, com suas diversas especificidades.

Os livros paradidáticos representam uma fonte de enriquecimento para as suas atividades em sala de aula. Para um melhor proveito, o seu uso deve ser harmonizado em uma proposta metodológica de condução da prática docente que integre o livro didático, os paradidáticos e os demais recursos utilizados por você.

Capítulo 6
Números e operações

*Mônica Cerbella Freire Mandarino**

Introdução

A Matemática é uma construção humana, e uma das principais motivações de seu desenvolvimento são as necessidades práticas. Assim, ao longo do processo histórico de escolarização dos conteúdos matemáticos, sempre foi dado grande valor a habilidades relativas aos **números e suas operações**, pois eles são essenciais para contar e medir, atividades tão antigas quanto a civilização. Nos primeiros séculos do ensino no Brasil, a escola destinada às crianças tinha como objetivos principais ensinar a ler, escrever, contar e fazer as quatro operações básicas. De lá para cá, as aplicações da Matemática não param de se expandir, mesmo nas ações mais simples de nosso cotidiano, e a escola tem sido desafiada a se adaptar às novas exigências de formação. Além disso, do ponto de vista metodológico, ensinar a contar e a operar ganhou novas configurações e exigências.

Tendo como referência os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998, pp.38-39), podemos, resumidamente, delimitar o campo de **números e operações** para os primeiros anos do Ensino Fundamental da seguinte forma:

* Doutora em Educação. Professora da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO). Docente dos Programas de Mestrado em Educação da UNIRIO e de Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ).

Números e operações – conhecimento dos números naturais e números racionais (com representações fracionárias e decimais) como instrumentos eficazes para resolver determinados problemas e como objetos de estudo, considerando-se suas propriedades, relações e o modo como se configuram historicamente. O trabalho com as operações deve valorizar a compreensão dos diferentes significados de cada uma delas, as relações existentes entre elas e o estudo reflexivo do cálculo, contemplando os tipos: exato e aproximado, mental e escrito.

Este é o campo que mais tem recebido atenção e contribuições importantes das pesquisas em Educação Matemática. Por isso, é fácil encontrar publicações voltadas ao aprimoramento da prática docente e dos livros didáticos. Hoje em dia, é possível afirmar que muitas das recomendações de pesquisas nesta área já foram incorporadas aos textos didáticos e à prática das salas de aula, tais como: uma construção mais significativa do sistema de numeração decimal; o uso de materiais concretos e jogos; o trabalho com os conceitos e significados das operações fundamentais; a apresentação de algoritmos alternativos de cálculo; a valorização de problemas contextualizados; a introdução de atividades voltadas para o cálculo mental, estimativa e uso de calculadoras; dentre tantas outras que nos propomos a discutir neste capítulo.

Os números naturais[1]

O processo de aquisição do número, por parte das crianças, é a base para toda sua aprendizagem futura da Matemática. E este processo se inicia pela contagem. Você já observou crianças pequenas contando? Ao contarem uma coleção de objetos, elas "recitam" números, muitas vezes, "saltando" alguns e repetindo outros. Se os objetos estão espalhados, elas costumam contar alguns mais de

[1] As ideias aqui sintetizadas estão desenvolvidas no livro Números naturais: conteúdo e forma, de Mônica Cerbella Freire Mandarino e Elizabeth Belfort. Rio de Janeiro: Ministério da Educação: Universidade Federal do Rio de Janeiro, LIMC – Laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento em Ensino de Matemática e Ciências, 2005.

uma vez e deixam de contar outros. Além disso, nem sempre é claro quando devem parar de contar. Crianças neste estágio ainda não desenvolveram o conceito de número, mas ele está presente em suas vidas – e isso incentiva suas primeiras contagens. Esta “vontade” de contar é levada para a escola e nós, professores, podemos tirar muito proveito dela.

Da mesma forma, os números que estão incorporados ao seu dia a dia – sua idade, o número de irmãos, o número da casa etc., precisam ganhar significado. A partir do conhecimento da criança sobre os números do cotidiano, cabe a nós, professores, ajudá-la a observar diferentes significados e usos.

Embora não seja objetivo deste capítulo discutir todo o processo inicial de construção do conceito de números, é preciso salientar que este processo envolve muito mais do que a apresentação de símbolos e da nomenclatura, como ainda enfatizam alguns livros didáticos. Também não faz sentido, como se verifica em muitas obras, apresentar um algarismo de cada vez, em uma sequência repetitiva de atividades tais como: observar e associar símbolo a desenhos, copiar o símbolo para treinar sua caligrafia e desenhar uma quantidade de objetos anunciada pela apresentação de um algarismo.

O número é um dos atributos de uma coleção de coisas. Coleções podem ser caracterizadas pelo tipo de objetos (frutas, carros, mochilas,...) que as compõem, pelas cores etc. Também podemos diferenciar uma coleção de outra pela quantidade de elementos que elas contêm. Por isso, não faz sentido apresentar o número 5, por exemplo, sem compará-lo com outros.

Utilizamos os números para **realizar contagens**, ou seja, para responder a perguntas do tipo “**quantos?**” (“há 30 alunos”, “tenho 14 carrinhos”, “gastei 20 reais” etc.). Os números ajudam também a identificar um objeto de uma coleção ordenada. Para isso, recorremos à **estrutura de ordenação** dos números naturais para responder a perguntas do tipo “**qual?**” (“o quinto andar”, “o décimo quarto na fila de espera” etc.).

Mas há outras aplicações em que essas estruturas dos números naturais não são necessárias. Isso quando eles são usados apenas como um **sistema eficiente de códigos**. Nestes casos, apesar de chamarmos estes registros de números (número da identidade, número do telefone, número do ônibus etc.) não faz sentido compará-los ou fazer operações com eles. Por exemplo, não tem significado dizer “meu número de telefone é maior do que o seu!” ou adicionar os números das identidades de duas pessoas.

Você pode explorar o uso do número como código de maneira bem interessante ao analisar, em sala de aula, alguns tipos de código que estão presentes em: códigos de barras de produtos diversos; contas a pagar; registros civis; número de matrícula na escola ou no posto de saúde; placas de carro, entre outros. É possível propor pesquisas sobre a estrutura desses códigos e também a criação de outros para diversas finalidades: pontuação em jogos, formação de grupos, processos eleitorais. O importante é o aluno perceber que, apesar de não possuir a estrutura dos números (contagem e ordenação) ou do sistema decimal de numeração, a formação de um código precisa ter regras que garantam seu objetivo de identificar, claramente, um elemento dentre todos os codificados.

O trabalho com diferentes significados e usos dos números começa a ser valorizado pelos livros didáticos. São comuns páginas de abertura de capítulos ou de unidades com imagens que auxiliam o professor a promover uma boa discussão deste aspecto com seus alunos. No entanto, em muitos casos, as atividades propostas logo a seguir se restringem ao uso dos números em situações de contagem. Por sua vez, a abordagem dos números ordinais se resume à apresentação da notação simbólica (1º, 2º, 3º etc.) e da nomenclatura (primeiro, segundo, terceiro, etc.), sem dar atenção à sua real motivação, que é a estrutura ordenada do conjunto dos números naturais.

Trabalhar a ordenação dos números naturais é fundamental para que possamos compreendê-los bem. É preciso ajudar os alunos a concluir, por exemplo, que podemos sempre encontrar mais um número somando uma unidade ao último número conhecido e que o novo número é maior do que ele. Podemos, também, explorar diversas sequências numéricas ordenadas, como a sequência dos números pares, dos múltiplos de 5 etc. O uso da reta numérica é uma excelente estratégia para observação destas regularidades. No entanto, vale lembrar que a excessiva valorização de termos, como sucessor, antecessor e números consecutivos, pouco contribui para a conceituação da ordenação. Neste caso, assim como em várias outras situações, o emprego da nomenclatura só faz sentido, e deve ser realizado, como um ganho de precisão na comunicação, pela necessidade de seu uso. Aprendemos uma palavra nova, e passamos a usá-la adequadamente, se ficar evidenciado seu valor social na comunicação entre as pessoas. É nesse sentido que o diálogo em Matemática precisa ser mais valorizado.

Não evite o trabalho com “números grandes”. Eles estão presentes em diversas situações da vida dos alunos, tais como: os dias dos meses do ano (que chegam a 31); o próprio ano (número maior do que 2000); o número da casa ou do apartamento (que às vezes é formado por três ou até quatro dígitos); as idades dos familiares; dentre tantos outros que poderíamos citar. Professor, aconselhamos que você, tire proveito destes conhecimentos, explore a escrita destes números e as características desta escrita (tanto por extenso como usando algarismos). Pergunte aos alunos e ouça o que eles já sabem sobre a escrita de números maiores. Peça-lhes que escrevam números que não foram ensinados, reflitam sobre como escrevem esses números.

A escrita das crianças nos dá pistas sobre os conhecimentos que estão construindo. Elas prestam atenção aos números à sua volta e, aos poucos, percebem regularidades e começam a compreender propriedades importantes que serão formalizadas pela escola.

FIGURA 1

As habilidades de observar regularidades numéricas e fazer generalizações são essenciais para a formação do pensamento matemático. Muitos livros didáticos buscam desenvolvê-las por meio de atividades que envolvem sequências numéricas, quase sempre propostas a partir da apresentação de alguns casos que desafiam a criança a "descobrir a regra" para continuar a escrever termos da sequência. O uso de atividades deste tipo precisa ser bem cuidado, porque uma sequência dada apenas por seus primeiros termos pode, em princípio, ser continuada de diversas maneiras. Se o livro ou o professor não informam qual a regra da sequência, não podem considerar que elas tenham respostas fechadas ou únicas. Nesses casos, a criatividade do aluno para gerar um padrão diferente do esperado precisa ser levada em conta. Observe o exemplo a seguir.

Continue a sequência: 2 3 5 _ _ _

Algumas respostas possíveis:

2	3	5	7	11	13	→	Sequência de números primos
2	3	5	8	13	21	→	5=2+3; 8=3+5; 13=5+8; 21=8+13
2	3	5	8	12	17	→	3=2+1; 5=3+2; 8=5+3; 12=8+4; 17=12+5
2	3	5	10	20	40	→	5=2+3; 10=2+3+5; 20=2+3+5+10; 40=2+3+5+10+20
2	3	5	7	9	11	→	5=3+2; 7=5+2; 9=7+2; 11=9+2
2	3	5	2	3	5	→	Repetição do período 2; 3; 5
2	3	5	14	69	965	→	5=2x3-1; 14=3x5-1; 69=5x14-1; 965=14x69-1

FIGURA 2

O zero

Em que momento apresentar o zero às crianças e como fazê-lo são perguntas frequentes de diversos professores. Sabemos que a base principal do processo de aquisição de conhecimentos relativos aos números naturais é seu aspecto cardinal (o número usado para designar uma quantidade de elementos). Por isso, como o zero designa a ausência de quantidade, as primeiras contagens não o incluem, o que é bastante coerente. No entanto, o algarismo zero está presente na escrita de diversos números com os quais as crianças se defrontam e o zero é fundamental para a construção do sistema decimal de numeração. No registro simbólico de agrupamentos que formam dezenas sem a sobra de unidades desagrupadas, como nos números 10, 20, 30,..., o zero passa a ter um papel fundamental. Ele é o algarismo que representa a ausência de elementos de um determinado tipo ou em uma determinada ordem numérica. Assim, consideramos que o zero deve ser incluído no repertório de algarismos conhecidos assim que ele for necessário em uma notação numérica, ou logo que as crianças tiverem curiosidade a respeito dele.

O zero é número natural? O zero é par ou ímpar? Por que o zero pode ser dividido, mas não pode ser divisor? O zero é múltiplo de qualquer número? Estas são algumas das diversas outras dúvidas comuns a respeito do zero... No entanto, acreditamos que, para esta faixa etária, tratar o zero como um número natural, sem que por isso precisemos definir este conjunto numérico explicitamente, não causa problemas à criança.

Algumas pesquisas têm demonstrado que o zero não causa estranheza à criança e seu uso traz menos problemas do que se imagina. Para este número, realmente, foi preciso estabelecer regras específicas que garantem a validade de propriedades operatórias. No entanto, muitas dessas não parecem difíceis de serem compreendidas pelas crianças. Observe, por exemplo, como elas lidam intuitivamente com o zero em brincadeiras de par ou ímpar. Se o resultado é zero (duas mãos fechadas) facilmente eles decidem que ganhou quem disse par! E esta decisão está matematicamente correta. Voltaremos ao zero e discutiremos outras dúvidas em torno de seu uso mais adiante, no item sobre operações.

O sistema de numeração decimal

A primeira grande estratégia de contagem é o agrupamento. Formar grupos organiza o que deve ser contado, nos ajuda a não nos esquecermos de contar algum objeto e evita que um mesmo objeto seja contado mais de uma vez. Observe a figura na página seguinte. Em qual das duas configurações você acha que é mais fácil contar o total de palitos?

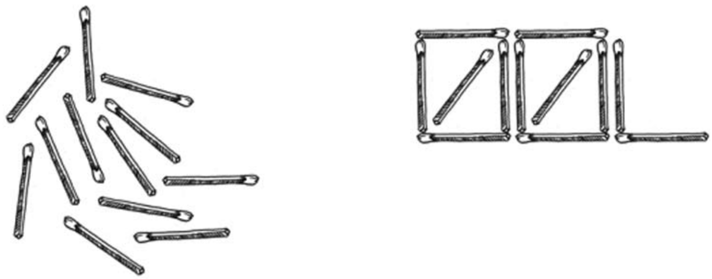


FIGURA 3

Nosso sistema de numeração se baseia em estratégias de agrupamento: juntamos dez unidades para formar uma dezena, dez dezenas para formar uma centena, dez centenas para formar um milhar, e assim por diante. Esse sistema é chamado decimal exatamente pela *escolha* de agrupar de dez em dez.

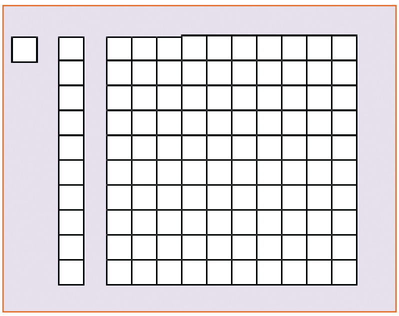
Na maioria dos livros didáticos, a apresentação do sistema de numeração decimal é feita por meio de atividades adequadas de agrupamento. Para isso, há o estímulo ao uso de materiais didáticos, como palitos, tampinhas, figurinhas, dentre outros materiais de contagem, passando-se aos poucos para materiais estruturados como o ábaco e o material dourado. Lembramos, no entanto, que tais atividades devem sempre ser vivenciadas com materiais concretos que possam ser manuseados pelas crianças, conforme ressalta o capítulo 2 deste livro sobre *A metodologia de ensino e aprendizagem nos livros didáticos de Matemática*.

A representação de agrupamentos por meio de desenhos de figuras não garante a aprendizagem. Os livros ilustram alguns casos que devem, apenas, servir como inspiração para muitos outros que precisamos planejar. Cabe destacar que, no intuito de estimular o uso do material dourado, alguns livros oferecem encartes com material deste tipo. No entanto, em alguns casos, a tentativa de reproduzir tal material incluindo o efeito de tridimensionalidade em uma representação que é plana (no papel) torna seu uso ineficaz. A fim de poder reproduzir, no plano, a estrutura do material dourado, será necessário limitar sua estrutura a três ordens numéricas: unidade – quadradinho; dezena – retângulo formado por 10 quadradinhos;

e centena – quadrado formado por 10 retângulos de dezena ou 100 quadradinhos de unidade. Não é possível representar o milhar no plano, já que as peças não possuem a dimensão profundidade de objetos tridimensionais, e mesmo que agrupemos 10 quadrados planos, de uma centena cada, jamais formaremos um cubo (que necessariamente deveria ter 6 faces e 12 arestas de mesmo comprimento).

Na Figura 4, comparamos duas propostas para recorte de encartes que buscam reproduzir o material dourado. A primeira é adequada, já que a representação no papel só pode ser plana. Já no uso da segunda opção, observe que após recortar dez cubinhos planificados, e colocá-los lado a lado, a criança não obterá a figura que representa a dezena. Do mesmo modo, se o aluno emparelhar 10 barras recortadas deste tipo de material na tentativa de obter a figura que representa a centena, ele terá uma figura diferente da que é proposta e que aparece como resultado nos livros.

ADEQUADO INADEQUADO



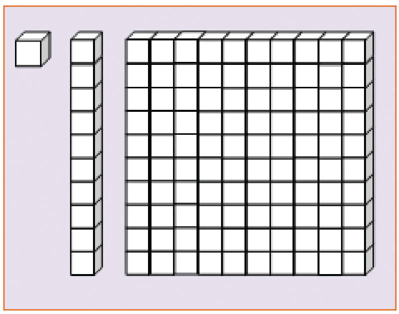


FIGURA 4

Caso o material apresentado como encarte do livro seja inadequado, como o mostrado acima, você pode discutir esta inadequação com os alunos, transformando-a em uma proposta de aprendizagem. Verificar que, sem a superposição de partes das figuras que representam os cubinhos não se consegue obter a barra que é apresentada para a dezena, pode ajudar na observação de características de representação de objetos tridimensionais no plano. Na continuação, o melhor é recortar o molde oferecido sem incluir a parte que representa a profundidade, tornando o material adequado para uso.

O trabalho com a ampliação progressiva dos números de 10 a 99, a formação da centena e a continuidade de representações

numéricas deve ser bem cuidadoso, mas não precisa ser feito passo a passo, como se a cada ampliação estivéssemos tratando de construções novas. O importante é a compreensão da estrutura do sistema de numeração e, quando isso ocorre, não faz diferença falar de **21** ou **81**, por exemplo. No entanto, há professores que insistem em uma progressão exageradamente subdividida, além de enfatizarem, em excesso, habilidades de reprodução mecânica da escrita numérica, por extenso, e de decomposição das ordens numéricas. O que também se observa em alguns livros didáticos.

Se você, professor, escolheu um livro em que as atividades estão organizadas dessa maneira, complemente o seu trabalho com outras que tenham outra estrutura e sequência diferente para apresentação dos números de 10 a 99.

Cabe ressaltar que qualquer número pode ser obtido de diferentes maneiras, com base em sua decomposição em ordens ou recorrendo-se a operações numéricas. E que a escolha de formas adequadas a diferentes objetivos ajuda muito o desenvolvimento de habilidades de cálculo mental e o uso de algoritmos alternativos. Observe o exemplo a seguir:

128 = 1 centena + 2 dezenas + 8 unidades	128 = 100 + 20 + 8
128 = 12 dezenas + 8 unidades	128 = 120 + 8
128 = 60 + 60 + 8	128 = 64 + 64
128 = 130 – 2	128 = 100 + 30 – 2

Professor, não restrinja o trabalho de decomposição a uma forma única, como se não fossem possíveis outras, tão válidas quanto as mais tradicionais! A decomposição em ordens, como nos primeiros casos dos exemplos de decomposição do número 128, acima, pode levar ao erro de afirmar que este número possui apenas duas dezenas e não, como é o correto, doze dezenas (10 delas foram agrupadas para formar a centena).

Como vimos, os números naturais são usados como instrumentos para a contagem de coleções, para identificar com um código uma pessoa ou um objeto ou, ainda, para localizar um elemento de uma sequência. Mas seus usos não se esgotam aí. Os homens usaram, desde cedo e continuam usando, os números naturais para medir grandezas. Eles podem surgir quando se responde perguntas do tipo: *Quanto "pesa" esta caixa? Quantos dias faltam para o começo das aulas? Quantos palmos tem esta fita? Qual a distância entre Riachão e Remanso?*

Quanto custa este carrinho? Nestes casos, aparecem como respostas possíveis, respectivamente: "pesa" 2 quilos; faltam 7 dias; a fita tem 10 palmos; a distância é de 70 quilômetros; o carrinho custa 12 reais.

O uso dos números para registrar resultados de medições ocupa um lugar de destaque e acabou influenciando a organização da matemática escolar para os primeiros anos do Ensino Fundamental em nosso e em outros países. Nessa organização, temos grandezas e medidas como um dos quatro grandes campos em que se agrupam os conteúdos matemáticos nesta fase da escolaridade. Por isso, o capítulo 8 do presente livro dedica-se a refletir especificamente sobre esse importante campo.

Em particular, o número como medida de grandeza está nas origens da invenção dos números fracionários, que se fizeram necessários quando a unidade escolhida não cabia um número inteiro de vezes na grandeza a ser medida. No nosso dia a dia, estamos acostumados com frases como estas: *Comi um quarto da pizza*; *A altura de Pedro é 1 metro e meio; O preço deste produto é R$ 8,70; Fiquei na casa de minha tia 2 meses e meio*; e tantas outras. É desses outros números que trataremos a seguir.

Os números racionais

Acabamos de ver que não são apenas os **números naturais** que estão presentes em nossas vidas e nos currículos de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental. O processo que se inicia com a construção dos números naturais precisa, aos poucos, ser ampliado para incluir novos campos numéricos e novas aplicações. Nessa fase da escolaridade, os números racionais, em suas representações fracionárias ou decimais, já são objeto de estudo e causam muita preocupação aos professores e alunos. Ainda no Ensino Fundamental, do 6º ao 9º anos, será preciso lidar com os números negativos – inteiros e racionais – e com os números reais. Lembrando, sempre, que as experiências iniciais com cada campo numérico são fundamentais para o bom desenvolvimento deste longo processo.

Os usos e significados dos números racionais são diversos e importantes para lidarmos, cotidianamente, com informações necessárias ao exercício da cidadania. Quando medimos ou descrevemos medidas, por exemplo, é comum recorrermos a **frações** ou **números decimais** (1/2 quilo; R$ 3,50; 1,55 metros etc.). Devido ao uso crescente das calculadoras e computadores, a representação fracionária dos números racionais tem sido desprezada. Mas, ao contrário do que muitos pensam, as frações estão presentes em muitas situações do nosso dia a dia e, se não compreendemos bem o seu significado, podemos comprometer a própria construção da escrita decimal dos números racionais. Além disso, em estágios posteriores da escolaridade, as frações são essenciais, como nos cálculos algébricos que surgem inevitavelmente em problemas de geometria ou de grandezas e medidas. Ao chegar nesses estágios, é importante que o aluno já esteja bem familiarizado com as frações. Assim, pode se concentrar no próprio problema e não fica impossibilitado de resolvê-lo corretamente devido a dificuldades operatórias que deveriam ter sido superadas muito antes.

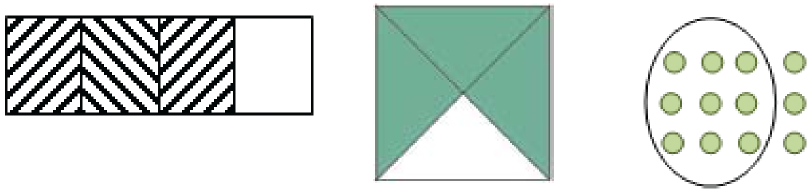
As frações

As frações[2], assim como as operações fundamentais, também estão associadas a mais de um tipo de aplicação. Para os anos iniciais do Ensino Fundamental quatro diferentes usos das frações precisam ser explorados. No entanto, não faz sentido apresentar aos alunos este tipo de classificação. Os diferentes usos devem ser incorporados, aos poucos, em atividades diversificadas, com a ampliação dos tipos de problemas que vão enriquecendo as possibilidades de aplicação. Aqui, para organizar nossa discussão, apresentamos algumas aplicações separadamente. E o aconselhamos a iniciar o trabalho didático pelas ideias de parte-todo, e voltamos a afirmar que este tipo de classificação não precisa ser apresentado aos alunos.

A aplicação mais usual de fração é a de que a **fração representa uma parte de um todo**. Neste caso, a fração representa certa quantidade de partes de uma unidade que foi dividida em partes iguais.

Por exemplo, a fração $\frac{3}{4}$ pode representar um "todo" ou "inteiro" (uma figura ou uma coleção de objetos) que foi dividido em 4 partes iguais, tendo sido "usadas" 3 destas partes.

[2] Algumas das ideias apresentadas nesta seção são tratadas no texto do PGM 4, de Cleiton Batista Vasconcelos e Elizabeth Belfort, do boletim da série "Discutindo Práticas em Matemática", exibida em agosto de 2006, pelo Salto para o Futuro da TV Escola - SEED/MEC. Disponível em: http://www.tvbrasil.org.br/fotos/salto/series/162048Discutindo.pdf. Acesso em: 10 ago. 2009.



$\frac{3}{4}$ do retângulo foram hachurados

$\frac{3}{4}$ do quadrado foram pintados

$\frac{3}{4}$ das bolinhas foram separadas

FIGURA 5

Note que a relação parte-todo precisa ser explorada quando o “todo” considerado é uma figura (que chamaremos de grandezas contínuas) e também quando o “todo” é uma coleção de objetos (que chamaremos de grandezas discretas).

Primeira ideia: fração como parte-todo de grandezas contínuas

Para compreensão da fração como parte de uma grandeza contínua (comprimento, área, volume etc, associados a figuras geométricas ou a objetos: bolo, barra de chocolate, etc.), que será dividida em partes iguais, é importante a criança fazer experiências concretas. A partir destas podemos, aos poucos, introduzir a representação simbólica e a nomenclatura das frações. Ensinar o conceito de fração não é apresentar símbolos e nomes às crianças e pedir-lhes que os reproduzam. É preciso muito mais! Também não é natural que a partir de experimentos que envolvam apenas grandezas contínuas os alunos sejam capazes de compreender os outros significados e aplicações das frações.

Um recurso simples para experiências com o **conceito parte-todo de frações no contínuo** é o uso de tiras de papel ou de pedaços de barbante para serem dobrados pelas crianças em partes iguais que serão demarcadas pelas próprias crianças. Também possibilitam que os alunos percebam concretamente que um mesmo “todo” (uma tira de papel ou um pedaço de barbante do mesmo tamanho) pode ser dividido em diferentes quantidades de partes iguais. Esse é um aprendizado importante. É comum que, ao produzir desenhos para representar frações, as crianças variem o tamanho do todo em função do número de subdivisões necessárias. Esse fato evidencia uma aprendizagem inadequada do conceito de fração.

É claro que dividir uma tira de papel em 5 ou 7 partes iguais não é tão simples, mas, partindo-se da divisão em duas e três partes iguais, podemos explorar frações com diversos denominadores 2, 3, 4, 6, 8, 12,... (os múltiplos de 2 e 3).

Veja, à esquerda, como é possível dividir em 3 partes iguais. À direita, temos a produção de um aluno usando tiras de papel para representar algumas frações.

FIGURA 6

Quando dizemos, nas experiências com subdivisão de tiras ou barbantes, "partes iguais" estamos, na verdade, pedindo que o **comprimento** desses objetos seja dividido em partes iguais. Trabalhando com objetos alongados é, quase sempre, o comprimento a grandeza que está em jogo.

No entanto, em outros casos, podemos associar a ideia de fração à área de figuras. Neste caso, ao solicitarmos "divida a figura em quatro partes iguais" podemos estar querendo dividir a figura dada em quatro figuras de mesma área. Neste caso, as partes não precisam ser iguais, pois sabemos que figuras desiguais podem ter a mesma área. Veja, por exemplo, na Figura 7, algumas maneiras de obter ¼ de um retângulo. Mostre uma estratégia bem diferente do padrão e desafie seus alunos a inventar outras. Eles costumam ser bem criativos quando percebem que isso é possível, mas se lembre de verificar se as áreas são realmente iguais. Procure fazer esta experiência também para outras frações. Nos desenhos da Figura 7, temos quatro representações da fração ¼. Nas duas da esquerda, a figura ficou dividida em quatro partes iguais e, portanto de mesma área. Nas da direita, o retângulo ficou dividido em quatro partes de mesma área, mas por meio de figuras não iguais.

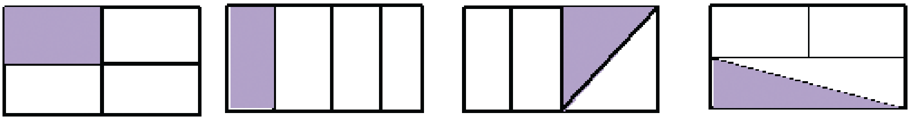


FIGURA 7

A marcação de frações na reta numérica também é um recurso muito importante, e por isso trataremos deste assunto ainda neste capítulo.

Segunda ideia: fração como parte-todo de grandezas discretas

Quando trabalhamos com o **conceito de fração parte-todo de coleções de objetos**, esta adquire mais claramente um sentido operatório, já que representa uma parte da quantidade total de objetos. Ou seja, obtemos um número como resultado da fração de uma quantidade. Problemas envolvendo metade, terça parte, quarta parte etc., são ótimos para a compreensão de fração como parte-todo de coleções de objetos. No entanto, muitas vezes problemas deste tipo são abordados em sala de aula e nos livros didáticos sem que a representação fracionária seja evidenciada. Por exemplo, quando se propõe que o aluno "calcule a terça parte das páginas do livro", raramente o resultado é representado como 1/3 do livro.

Aos poucos é preciso levar a criança a perceber que na relação parte-todo de conjuntos de objetos, quando afirmamos que dividimos o "todo" em parte iguais, o que precisa ser igual é a quantidade de objetos em cada parte. Individualmente os objetos podem ser diferentes! Este não é o caso das bolinhas do exemplo da Figura 5, mas é o caso de várias situações cotidianas como dividir a turma (o conjunto de todos os alunos presentes) em cinco partes iguais para que 2/5 da turma realize uma atividade enquanto os demais, 3/5 dos alunos, realizam outra. É claro que neste caso, como em diversas outras aplicações, os elementos (alunos) não são idênticos individualmente, mas todos os cinco grupos deverão possuir a mesma quantidade de alunos.

É importante escolher com cuidado o “tamanho” do conjunto considerado como todo, para que não ocorra, em um primeiro momento, a necessidade de se dividir (quebrar) algum dos elementos do conjunto. Um número bom de elementos é 12, uma vez que de um conjunto com doze elementos pode-se, facilmente, encontrar $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{12}$.

Lembre que não faz muito sentido falar em uma bola de gude dividida em duas partes iguais ou em uma pessoa dividida em três partes, por exemplo

Terceira ideia: fração como razão de grandezas discretas

Neste caso, usamos as frações para representar uma razão, uma comparação entre grandezas que podem ser contínuas ou discretas, como no caso parte-todo. Apesar de muito utilizada em situações reais, esta ideia não está suficientemente presente nos livros didáticos e nas salas de aula. Vejamos alguns exemplos:

A fração 3/5 pode representar o resultado da comparação de dois subgrupos de uma coleção de 8 objetos, dentre os quais 3 são de um tipo e 5 são de outro. Por exemplo, em um grupo de 8 pessoas, 3 são homens e 5 são mulheres. Dizemos que a razão é de 3 para 5, ou ainda que há 3 homens para cada grupo de 5 mulheres. Uma ampliação importante desta noção é aquela que envolve quantidades maiores. Quando ouvimos dizer que a razão entre homens e mulheres de uma cidade é de 3 para 5, é claro que a cidade não possui apenas 8 habitantes. Leve os alunos a perceber que esta razão se mantém se a população for de 8 mil habitantes e houver 3 mil homens e 5 mil mulheres.

É possível construir uma tabela para verificar diversos números para os quais uma razão se mantém.

Para a razão 3/5, de nosso exemplo, podemos pensar em várias situações, veja algumas:

População	Homens	Mulheres
16	6	10
40	15	25
72	27	45
$8 \times n$	$3 \times n$	$5 \times n$

FIGURA 8

Experiências deste tipo auxiliam os alunos a compreenderem razões anunciadas como resultado de várias pesquisas publicadas pelos meios de comunicação. Sem dúvida, depois de conhecerem os conceitos de frações equivalentes e simplificação de frações, será mais simples explorar experiências deste tipo. No entanto, mesmo antes disso, algumas simulações podem ser muito interessantes e contribuir, inclusive, para a apresentação destes outros conceitos. A construção de situações novas para as quais a razão se mantém, ajuda a identificar frações equivalentes, como no exemplo explorado aqui: $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{15}{25} = \cdots$. A ideia de que todas estas frações representam a mesma razão fundamenta e dá sentido ao uso da simplificação de frações. Além disso, esta é uma boa atividade para explorar múltiplos.

Quarta ideia: fração como razão de grandezas contínuas

A fração como razão também pode envolver comparação entre duas medidas de uma mesma grandeza ou entre medidas de grandezas diferentes. No primeiro caso podemos falar, por exemplo, que: a razão das alturas de dois prédios, em metros, é de 2 para 5; duas fazendas possuem áreas, em hectares na razão de 3 para 5; o "peso" de uma embalagem, em quilogramas, está na razão de 1 para 4 em relação a uma outra. Assim, tomadas em uma mesma unidade de medida, duas grandezas podem ser comparadas por meio de uma fração. No segundo caso, um exemplo clássico da fração como razão entre grandezas diferentes é o cálculo da velocidade. A velocidade é uma razão entre as grandezas distância e tempo, ou seja,

$$\textbf{velocidade} = \frac{\textbf{distância}}{\textbf{tempo}}$$

Neste caso, a fração representa uma nova grandeza, com uma nova unidade de medida.

Note que quando usamos fração como razão, não estamos relacionando partes de uma mesma "coisa", considerada como um todo, mas comparando duas "coisas" distintas.

Outras ideias: a fração como resultado de uma divisão e a fração como número

A compreensão da fração como a representação de uma divisão de números naturais, apresentados como numerador e denominador, acontece quase sempre nos anos finais do Ensino Fundamental, por exigir um distanciamento dos alunos das ideias apresentadas até aqui. Este é um tipo de exigência típico do aprofundamento do pensamento matemático. Diversos conceitos precisam ser, aos poucos, abstraídos de suas representações concretas e ganham certa independência delas. A maioria dos livros didáticos para este nível de ensino não aborda tais ideias. Apesar disso, em algumas atividades, as frações são tratadas com tal distanciamento de seus significados concretos que parece ser intenção da obra chegar a tais abstrações de forma desnecessária e prejudicial à aprendizagem nesta fase. Lembremos que a transformação das frações em números exigiu um longo período de tempo, muitos séculos. Mas devemos ter cuidado em preparar o aluno, aos poucos, para que ele possa chegar a essa abstração. A marcação de frações na reta numerada é uma boa estratégia para isso.

Algumas outras contribuições para o trabalho com frações

Para iniciar o estudo de frações devemos garantir que os alunos tenham muitas oportunidades de explorar a divisão, tanto no sentido de repartir quanto no sentido de medida. Lembre-se de que incentivar o trabalho com a divisão não é sinônimo de ensinar seu algoritmo. **É preciso explorar os significados das operações, e o cálculo de resultados por processos operatórios espontâneos, antes da apresentação dos algoritmos formais ou não formais.** Temas que serão retomados e aprofundados no item sobre operações.

Apesar de a representação fracionária poder ser utilizada com diferentes significados, consideramos que apenas uma concepção deve ser ensinada de cada vez. À medida que a criança estiver trabalhando com uma das ideias de forma mais confortável, outras devem ser, aos poucos, acrescentadas. O recomendável é que o ensino de frações não se limite a um único significado, à reprodução de notação, nomenclatura e classificações, sem significado para os alunos, e nem fique limitado apenas a casos simples e particulares.

- Em geral, é comum que, após a conceituação, os programas de ensino e os livros didáticos prossigam em direção ao trabalho com: ordenação e comparação de frações; equivalência e simplificação; classificações; e operações com frações. Embora não seja possível abordar, neste capítulo, todos estes conceitos e os problemas de ensino e aprendizagem a eles associados, apresentamos a seguir algumas observações e recomendações fundamentais, que podem motivar a discussão nas escolas, a saber: assim como para as primeiras conceituações, o trabalho subsequente não pode ficar restrito à apresentação de regras e, às vezes, a fórmulas e macetes, para solucionar problemas típicos. Note que uma boa conceituação facilita a comparação entre frações sem que seja necessário subdividi-la em casos com regras a serem decoradas, tais como: "para comparar frações de denominadores iguais comparamos apenas os numeradores", e assim por diante.
- A maioria das classificações apresentadas para alunos dos anos iniciais são desnecessárias e refletem apenas um ensino focado na reprodução de procedimentos. De que serve, por exemplo, o aluno saber diferenciar e nomear frações próprias e impróprias, homogêneas e heterogêneas, ou frações decimais e não decimais? Tais classificações costumam ser úteis apenas para a enunciação de regras e a separação de procedimentos em casos a serem decorados. Os conceitos acabam não sendo focalizados como um todo. As crianças, e até adultos, demonstram dificuldade em aceitar que a fração $\frac{3}{4}$, por exemplo, pode ser escrita como 0,75. No entanto, há professores que iniciam este trabalho sugerindo, às vezes, obrigando, o aluno a transformar a fração $\frac{3}{4}$, no que costumam classificar como fração decimal (aquelas que possuem denominadores 10, 100, 1000,...), sem levar a criança a, primeiro, reconhecer a ideia de fração como resultado de uma operação de divisão do numerador pelo denominador.
- A equivalência pode ser construída concomitantemente com a conceituação de frações. Note que a ideia de razão entre quantidades pode ser um ótimo momento para gerar frações

equivalentes. No nosso exemplo, se a relação de 3 para 5 se mantém em quantidades maiores de pessoas, como podemos obter outros resultados? Dobrando o número de pessoas de 8 para 16 teríamos 6 mulheres para 10 homens, o que pode ser representado pela fração $\frac{16}{10}$, que é equivalente a $\frac{3}{5}$. A equivalência também pode ser observada por meio das atividades envolvendo dobradura de tiras de papel. Podemos representar frações equivalentes em tiras do mesmo comprimento e altura e levar a criança a concluir que elas representam a mesma parte do todo. O importante é não restringir a compreensão da equivalência a apenas alguns exemplos típicos, seguidos da apresentação de regras sem significado, e que parecem não ser válidas para as outras ideias associadas às frações.

- Quanto às operações com frações, recomendamos que, nos anos iniciais, sejam trabalhadas somente as operações de adição e subtração. Os conceitos associados à multiplicação e à divisão de frações são demasiadamente abstratos para esta faixa etária. Há autores que buscam apresentar tais operações por meio de casos particulares para os quais é possível alguma representação concreta. No entanto, a generalização de regras a partir da observação de poucos casos, além de ser incorreta do ponto de vista da formação matemática das crianças, não as leva a perceber propriedades importantes destas operações no campo dos números racionais.

Representação decimal de números racionais

Ao estudarmos números decimais estamos trabalhando outra representação da divisão da unidade em partes iguais. O mais importante nesta etapa é levar o aluno a compreender que tal representação é uma ampliação dos conhecimentos já adquiridos a respeito do sistema de numeração decimal.

Vale lembrar que, em nosso sistema de numeração, as ordens aumentam de valor da direita para a esquerda. Assim, uma dezena agrupa 10 unidades e, por isso, um algarismo escrito na ordem das dezenas vale 10 vezes mais do que a unidade. Seguindo esta lógica, a centena vale 10 vezes mais do que a dezena, e 100 vezes mais do que a unidade e, dessa forma, podemos escrever números tão grandes quanto quisermos. Seguindo esta mesma estrutura podemos também escrever números menores do que a unidade, tão pequenos quanto quisermos!

No entanto, como já fazem muitos livros didáticos, o estudo da representação decimal de números racionais pode ser iniciado apresentando apenas o décimo, que representa a décima parte da unidade. Nesta apresentação, é importante que o aluno perceba que algarismos que representam partes menores do que uma unidade precisam estar à direita da ordem das unidades simples. Precisam reconhecer, também, a necessidade de um símbolo para separá-los da parte inteira.

Assim, a vírgula deve aparecer como solução para separar claramente a parte inteira do número e evitar confusões. Se ela não existisse, poderíamos confundir a representação do 12 com a de 1 inteiro e 2 décimos, por exemplo. No entanto, estas quantidades são bem diferentes.

Como recursos didáticos para explorar a representação decimal de números menores do que a unidade, as obras didáticas têm recorrido ao material dourado, ao papel quadriculado, às cédulas e moedas de nosso sistema monetário, por exemplo. Nosso dinheiro é um dos melhores recursos, já que faz parte das experiências cotidianas das crianças.

Recorrendo ao sistema monetário é raro que o aluno tenha dúvida sobre o fato de que 12 é diferente de 1,2. Além disso, a presença da vírgula não é uma grande novidade, por já fazer parte da notação.

Seja qual for o material a ser utilizado o importante é estabelecer com clareza a referência que será considerada como unidade. É bastante comum as crianças ficarem confusas com o uso de recursos que foram fixados para outras representações. Professor fique atento a isso!

12 reais

1 real e 20 centavos

FIGURA 9

É claro que ao usar o material dourado de madeira não será possível subdividir o cubinho, que representa a unidade, em 10 partes iguais. Por isso, algumas obras sugerem que o "cubão", que representava uma unidade de milhar, passe a ser considerado como unidade simples. Isso precisa ficar muito bem combinado com as crianças! Pode-se também usar o material dourado de papel, e dividir o quadradinho que representa a unidade em 10 partes iguais. Apesar de não ser uma tarefa simples, fazer a subdivisão da unidade, pelo menos para as primeiras atividades, pode ser bastante esclarecedor.

Note que é bom iniciar a representação com registros similares ao do sistema monetário, ou seja, no nosso exemplo, escreveríamos 1,20 e não 1,2 para as primeiras experiências. Assim, efetivamente, aproximamos os novos conhecimentos daqueles que as crianças já trazem de suas vivências. Aos poucos, podemos levar o aluno a compreender que o número 1,2 é igual a 1,20. Isso será bastante útil para as operações com números decimais. Destacamos, ainda, que por meio do sistema monetário é possível antecipar experiências de uso dos números racionais em sua notação decimal.

As operações

Para discutir e esclarecer aspectos fundamentais sobre o ensino das operações com números naturais e racionais seriam necessárias muito mais páginas do que dispomos neste livro. Assim, optamos por tratar questões gerais e alertar apenas para os problemas recorrentes no ensino destes tópicos. Fica aqui o alerta para que os professores procurem aprofundar os estudos e as discussões na escola sobre este tema, que é tão importante. É preocupante o fato de o trabalho com as operações merecer grande dedicação do tempo escolar, sem que se verifique, muitas vezes, o sucesso esperado na aprendizagem de nossas crianças.

Iniciamos nossas reflexões lembrando que, nos anos iniciais, as operações matemáticas que precisam ficar bem estruturadas são as chamadas quatro operações fundamentais: adição, subtração, multiplicação e divisão. Alguns livros do 5º ano apresentam ainda a potenciação, o cálculo da raiz quadrada, algoritmos para decomposição em fatores primos, cálculo do **mdc** (máximo divisor comum) e do **mmc** (mínimo múltiplo comum), o que consideramos desnecessário para este nível de ensino. Se as operações fundamentais forem bem conceituadas e se os alunos superarem dificuldades de cálculo, que alguns costumam arrastar até a vida adulta, alcançaremos um ganho expressivo para a melhoria do desempenho matemático de nossas crianças, jovens e adultos.

Já é possível observar que a maioria dos livros didáticos melhorou, sensivelmente, o trabalho com as operações ao buscar valorizar a conceituação, apresentar situações-problema que abordam os diferentes significados e ao incluir variados procedimentos de cálculo.

Os significados das operações

Explorar os diversos significados das operações fundamentais tem sido considerado essencial para a boa compreensão dessas operações. Em que consiste essa preocupação? Ela nos pede para explorarmos as várias situações em que essas operações podem intervir. Tal exploração vai contribuir para que o aluno adquira a capacidade de decidir que operação deve mobilizar, pelo conhecimento das relações entre os elementos da situação. Isto vai além de levar o aluno, apenas, a aprender a fazer os cálculos envolvendo os números que aparecem em uma dada situação.

Em particular, no caso da adição e da subtração, existem muitos estudos em Educação Matemática que se dedicam a analisar seus significados e esses conhecimentos têm influído positivamente na elaboração das obras didáticas de Matemática. No entanto, nos limites deste capítulo, não é possível comentar exaustivamente este tema. Por isso vamos nos deter em breves considerações sobre situações ditas aditivas, sem pretender apresentá-las todas.

Para cada ideia associada às operações fundamentais apresentaremos um exemplo de enunciado e buscaremos ilustrar o procedimento operatório com uso de material de contagem. Mas, antes de iniciar tal apresentação, é fundamental destacar que este tipo de classificação não deve ser explicado às crianças. Ou seja, tanto a classificação, quanto a nomenclatura a ela associada, não devem ser um conteúdo de ensino. Esta é apenas uma forma de lembrar que não podemos deixar de explorar situações de todos os tipos, além de, aos poucos, introduzir problemas mais elaborados (aqueles que apresentam operações inversas ou mais de uma operação, por exemplo).

Para a adição, assim como para as demais operações, é um erro levar as crianças a associarem palavras-chave a uma determinada operação. Note que nos enunciados construídos como exemplo, pro-

Adição

JUNTAR

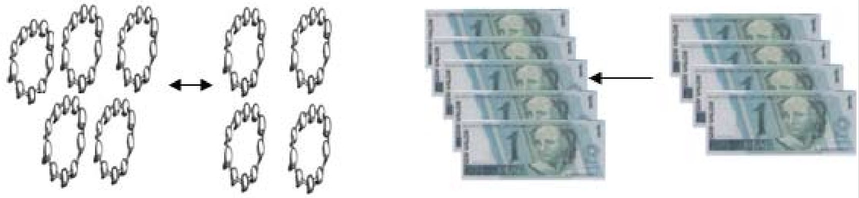
Maria e Joana fazem pulseiras de sementes para vender. No sábado, Maria vendeu 5 pulseiras e Joana vendeu 4. Quantas pulseiras foram vendidas por elas neste dia?

ACRESCENTAR

Ontem eu gastei 5 reais na lanchonete. Hoje eu gastei 4 reais de condução para ir à casa da minha avó. Quantos reais eu gastei nestes dois dias?

Venda de Maria — Venda de Joana

Ontem — Hoje



5 + 4 = 9

FIGURA 10

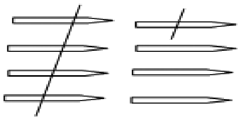
positalmente, utilizamos em problemas aditivos, termos que costumam estar associados à subtração. Muitos de nossos alunos, por associações equivocadas, apresentam dificuldade de identificação da operação, sendo comum perguntarem: *Esse problema é de quê? É um problema de mais ou de menos?* Tais perguntas evidenciam uma dificuldade conceitual e sua superação depende de um trabalho de reflexão sobre a ação que pode ser simulada com material concreto ou com desenhos representativos da situação.

Cabe destacar que o trabalho com diferentes significados não se esgota em algumas poucas experiências iniciais. É preciso continuar a insistir na apresentação de enunciados que envolvam diferentes significados e sua interpretação. Esta preocupação não pode ser abandonada ao longo dos anos, conforme o campo numérico se amplia, e a preocupação se volta para a introdução de novas dificuldades no uso dos algoritmos.

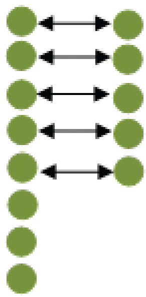
O trabalho com a adição e a subtração deve ser desenvolvido concomitantemente, e não realizado de forma estanque, em capítulos separados, como acontece normalmente. Afinal, elas são operações inversas uma da outra, e é importante ajudar a criança a perceber logo que os resultados de uma contribuem para que os resultados da outra sejam conhecidos. Experiências envolvendo diversas decomposições aditivas para um mesmo número colaboram significativamente para o cálculo da subtração.

Subtração

RETIRAR
A professora emprestou 5 lápis para os alunos que não tinham material hoje. Se ela tinha 8 lápis, quantos ela ainda pode emprestar?



COMPARAR
Você tem oito bolinhas de gude e seu irmão tem cinco. Quantas bolinhas você tem a mais do que seu irmão?



8 - 5 = 3

COMPLETAR
Luis está na casa 5 do jogo de trilha. Na próxima jogada, ele quer parar na casa 8 porque ela é premiada. Que valor ele precisa tirar no dado?

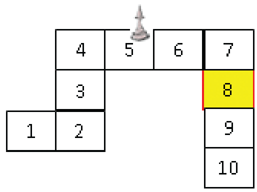


FIGURA 11

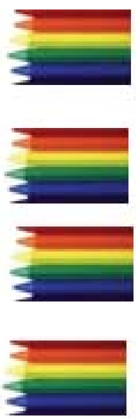
Na subtração, cada uma das ideias pode implicar em uma ação diferente do aluno. As experiências mais comuns nos livros, e nas práticas dos professores, são as que envolvem tirar elementos de uma coleção dada. Observe que em subtrações que envolvem a ideia de comparar, a ação sobre algum material ou representação por meio de desenhos, é diferente. Nestes casos, uma estratégia do aluno pode ser representar as duas quantidades envolvidas e estabelecer uma comparação, um a um, para ver quantos objetos de uma das coleções sobram.

Já no exemplo envolvendo a ação de completar, a atitude mais comum é resolvê-lo pela adição. Se eu tenho 5 e preciso completar até 8, o mais comum é colocar 5 objetos sobre a mesa e ir acrescentando outros, de um em um, até chegar a 8. Assim, ao apresentar a solução de um problema deste tipo, é bem provável que a criança registre 5 + 3 = 8 e, corretamente, responda que o resultado é 3. Esta prática só será detectada como dificuldade quando for preciso lidar com números maiores, situação em que o cálculo mental se torna mais difícil.

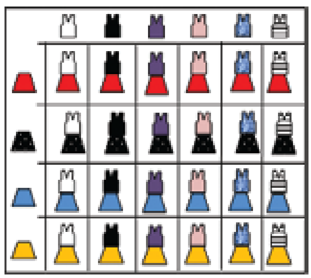
Tais preocupações ganham destaque no momento de apresentarmos o algoritmo recorrendo, por exemplo, ao material dourado. Se o problema é de **retirar**, devemos arrumar a quantidade inicial (minuendo) e dela retirar a outra quantidade envolvida no enunciado (subtraendo) e o que sobrar desta ação é o resultado (o resto). No entanto, se o problema envolve a ação de **comparar**, podemos representar com o material dourado as duas quantidades (minuendo e subtraendo), emparelhá-las e verificar o que sobra em uma delas (a diferença). Já no caso da ação ser de **completar**, a criança terá mais facilidade se representar primeiro a quantidade menor (subtraendo), completá-la até chegar à quantidade maior (minuendo), e ter como resposta o que foi preciso acrescentar, ou a diferença. Fazer tais experiências pode contribuir para dar significado às estratégias de cálculo e oferecer opções para a própria criança criar procedimentos de cálculo que não precisam ser únicos.

Multiplicação

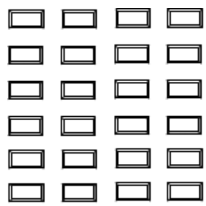
REPETIÇÃO DE PARCELAS IGUAIS
A professora recebeu 4 caixas de 6 lápis de cor para a sua turma. Quantos lápis de cor as crianças têm para usar?



COMBINATÓRIA
Fátima tem 4 saias e 6 camisas. De quantas formas diferentes ela pode se vestir?



RERPESENTAÇÃO RETANGULAR
A sala de aula está arrumada em 4 filas de 6 carteiras. Quantos alunos podem se sentar nesta sala?

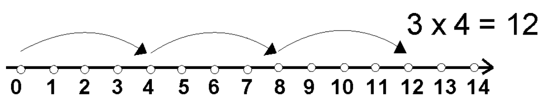


$4 \times 6 = 24$

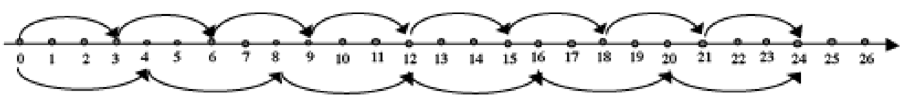
FIGURA 12

Na multiplicação, destacamos a importância da representação retangular para a compreensão do cálculo de áreas. Já as experiências com combinatória são fundamentais para se trabalhar as primeiras noções de possibilidades e probabilidades. Se restringirmos o conceito multiplicativo apenas a situações associadas à adição de parcelas iguais, a compreensão desses outros conhecimentos será dificultada. A visualização de situações combinatórias por meio de tabelas de dupla entrada ou árvores lógicas, além de promover a interdisciplinaridade com o campo do *tratamento da informação*, facilita a observação das propriedades comutativa e distributiva da multiplicação. Da mesma forma, o uso da representação retangular, por meio do uso de papel quadriculado, é um bom instrumento para a observação de regularidades que podem levar o aluno a concluir essas propriedades.

A reta numérica é um excelente recurso para o trabalho com a multiplicação e a divisão. A representação de resultados de multiplicações e divisões sobre retas desenhadas no papel pode ser usada para a observação de regularidades que ajudam a fixar a tabuada e a compreender os conceitos de múltiplos e divisores de um número, bem como de múltiplos e divisores comuns a dois números.



Múltiplos de 3



Múltiplos de 4

FIGURA 13

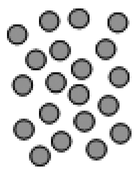
Como já afirmamos para a adição e a subtração, também a multiplicação e a divisão podem e devem ser exploradas concomitantemente. As brincadeiras na reta numérica ajudam a realizar esta missão. Quando a criança registra na reta o resultado de **3×4**, podemos perguntar: *Estando no 12, quantos pulos de tamanho quatro são necessários para voltar ao zero?* ou *Estando no 12, para voltarmos ao zero* *com apenas 3 pulos, qual o tamanho do pulo?* Observe que para todos os outros problemas de multiplicação, podemos criar um problema de divisão. Veja algumas possibilidades para os problemas que enunciamos:

- A professora tem 24 lápis e vai separá-los em 4 caixas. Ela precisa de quantas caixas?
- Fátima tem 6 camisetas e quer ter uma quantidade de saias para poder se arrumar de 24 maneiras diferentes. Quantas saias ela precisa ter?
- Uma turma tem 24 alunos. Para arrumar as carteiras em quatro filas, quantas carteiras devemos colocar em cada fila?

Divisão

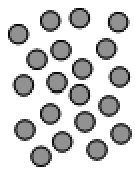
REPARTIÇÃO
A professora vai organizar sua turma de 20 alunos em quatro grupos. Quantas crianças cada grupo terá?

Esta ação começa marcando-se 4 espaços separados. Em cada um deles, vamos colocar uma bolinha (criança), de uma em uma, repetindo a distribuição até não restar mais nenhuma.



MEDIDA
A professora deseja organizar sua turma de 20 alunos em grupos de 4 alunos. Quantos grupos ela irá formar?

Neste caso, a ação envolve contar 4 e separar, contar mais 4 e separar, assim por diante, até não podermos formar mais grupos de 4.

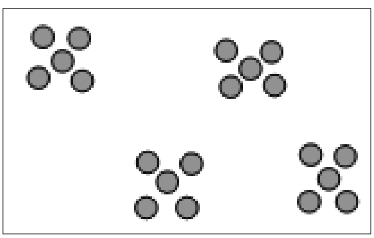


$$20 \div 4 = 5$$

FIGURA 14

É preciso observar que as ações sobre os objetos, no caso da repartição e da divisão como medida, são bastante diferentes. Nos exemplos citados, o resultado da divisão nos dois casos é 5, mas a visualização deste resultado é diferente em cada caso, veja:

Cada grupo terá 5 alunos.



Podemos formar 5 grupos.

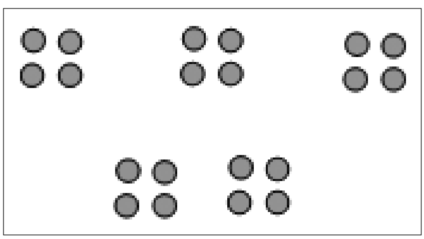


FIGURA 15

Experiências como estas podem ser vividas em sala de aula deste cedo, pois é bastante comum precisarmos organizar os alunos em grupos. Vale a pena explorar sempre o resultado deste tipo de ação. A partir delas já é possível experimentar a ideia de resto e nos defrontarmos com as decisões que a existência do resto envolve, em cada situação particular. Por exemplo, se ao final da distribuição dos alunos em 4 grupos sobra alguém, podemos estimular que eles pensem sobre isso, fazendo perguntas, como: *O que podemos fazer? Quantos alunos eram? Será que formando grupos de outra forma também sobrará um aluno?* Da mesma forma, quando organizamos a turma em times, com a mesma quantidade de crianças em cada time, podemos ter resto e essa também é uma situação que vale a pena ser explorada.

Assim, começamos a ajudar o aluno a compreender o que é resto e que este fato pode demandar diferentes decisões. Ele precisa, aos poucos, reconhecer que há situações em que o resto da divisão não deve ser abandonado. No caso da formação de times de alunos, podemos ajudá-los a investigar se uma nova divisão pode ser feita sem deixar resto. É interessante que percebam que não precisamos fazer tentativas arbitrárias. Sabendo resultados anteriores, podemos fazer previsões. Experiências e atitudes como estas ajudam na formação do pensamento matemático e na valorização de seu emprego.

Ainda sobre os significados das operações:

- Queremos reafirmar que o trabalho com os diferentes significados não visa à aprendizagem deste tipo de classificação. O professor é que tem que estar ciente das diferenças entre as ideias e preocupado em apresentar uma boa diversidade de experiências para seus alunos. Apesar disso, uma abordagem linear e classificadora ainda está presente em muitas obras didáticas, e isso pode acabar criando novas dificuldades.

- O uso excessivo de atividades a serem resolvidas apenas pela contagem de objetos ilustrados é prejudicial para a conceituação das ideias associadas às operações. **Raramente conseguimos detectar o tipo de raciocínio que a criança está fazendo se só apresentamos problemas que podem ser resolvidos por meio da contagem**. Por isso, muitas vezes, apesar de explorarmos todos os significados, só mais tarde percebemos algumas dificuldades que ficaram camufladas por usarmos apenas estratégias de contagem. Sugerimos que, mesmo sem as crianças conhecerem o algoritmo, sejam propostos problemas envolvendo quantidades maiores para que possamos detectar o que elas estão, efetivamente, realizando. Quanto ao cálculo do resultado, é possível recorrer à decomposição dos números envolvidos ou a experiências com material concreto nas quais não é possível calcular o resultado mentalmente e nem por uma contagem rápida do que aparece desenhado no livro. Alguns exemplos de estratégias de cálculo, como as que estamos defendendo neste parágrafo, serão apresentados no item a seguir, que trata dos procedimentos de cálculo.

Os procedimentos de cálculo

Iniciamos este tópico lembrando a importância do trabalho com as tabuadas de adição e multiplicação. Tabuada sim, só que usada de outra maneira, em que a criança decora enquanto brinca e se diverte. Há, em muitos livros didáticos, diversas sugestões de jogos usando dominós ou dados que podem contribuir para a fixação de resultados básicos das operações fundamentais. O conhecimento de tais resultados, ou o uso de recursos de cálculo mental (que envolvem a aplicação de propriedades das operações) para obtê-los, ajuda muito quando precisamos lidar com novas dificuldades, introdução do algoritmo convencional e ampliação do campo numérico. A reta numérica também é um bom recurso que nos possibilita fazer muitas experiências que contribuem para observação de regularidades que ajudam na fixação dos resultados da tabuada.

Outro aspecto que vale ressaltar a respeito das operações envolvendo números de apenas um algarismo (tabuada) é a inutilidade do registro vertical. O registro na vertical só é necessário para introdução dos algoritmos convencionais, para os quais o alinhamento vertical das ordens numéricas é fundamental. Apesar disso, muitos livros didáticos consideram como evolução do primeiro para o segundo ano a mudança do registro horizontal para o vertical.

Vale lembrar...
Ensinar as operações não se resume a ensinar procedimentos de cálculo!
Existem diversos procedimentos de cálculo válidos e não devemos apresentar aos alunos uma única opção de algoritmo.
No entanto, isso não significa que todos os alunos precisam ser hábeis no uso de diversos algoritmos. Explorar diferentes opções ajuda a compreender características de nosso sistema de numeração e das operações e dá direito ao aluno de escolher, dentre as opções apresentadas, aquela que ele melhor compreender.

Durante o trabalho com a conceituação das operações podemos propor que as crianças resolvam problemas com números de mais de um algarismo, e ir incluindo situações nas quais sejam necessários reagrupamentos, os famosos “vai um” e “pedir emprestado”, antes mesmo de apresentar algoritmos formais. É comum, diante de tais desafios, as crianças construírem estratégias próprias de cálculo, nas quais se pode, inclusive, avaliar sua compreensão do sistema de numeração decimal. Veja como três crianças resolveram um problema que envolvia adição de duas parcelas iguais a 19, antes de serem apresentadas ao algoritmo convencional. As três soluções são válidas e evidenciam habilidades matemáticas importantes:

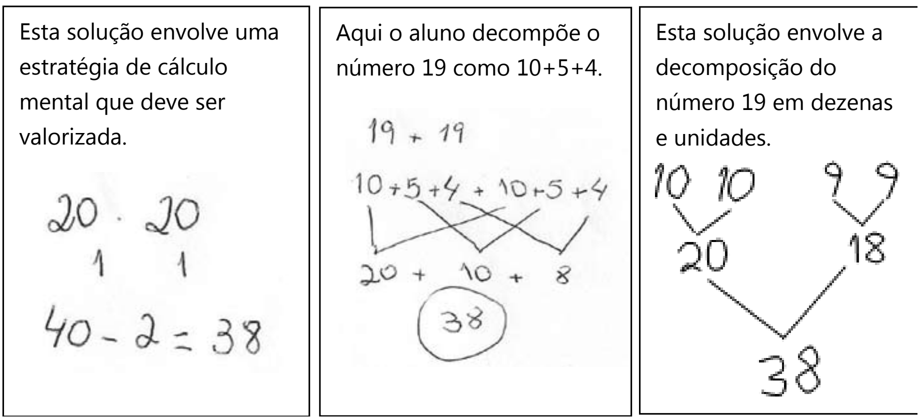


FIGURA 16

Desafios deste tipo podem ser propostos para as demais operações. Não é preciso utilizar somente “números pequenos” até a apresentação formal dos algoritmos. As crianças devem ser estimuladas a tentarem outras soluções, pois isso é um passo importante para a apresentação posterior dos algoritmos convencionais. Lembre-se, também, de que problemas envolvendo pequenas quantidades podem ser resolvidos por contagens e será difícil aparecerem estratégias próprias, como as exemplificadas acima e que ajudam você, professor, a observar se aprendizagens anteriores estão consolidadas.

Vejamos mais alguns exemplos de crianças construindo procedimentos próprios para outras operações. Esta experiência foi realizada pela professora Flavia Renata Coelho em uma turma de 2º ano na qual 16 alunos estavam presentes. Para exemplificar, separamos duas soluções diferentes para alguns dos problemas que foram propostos pela professora nesta aula. Para resolver o primeiro é preciso completar uma quantidade (subtração), o segundo envolve uma divisão com a ideia de medida e o terceiro uma multiplicação com a ideia de repetição de parcelas iguais.

Nossa turma tem 22 alunos, mas somente 16 estão presentes. Quantos alunos faltaram?

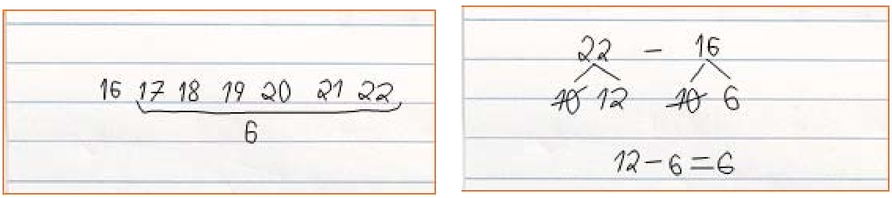


FIGURA 17

Para esse jogo, vamos trabalhar em duplas. Quantas duplas serão?

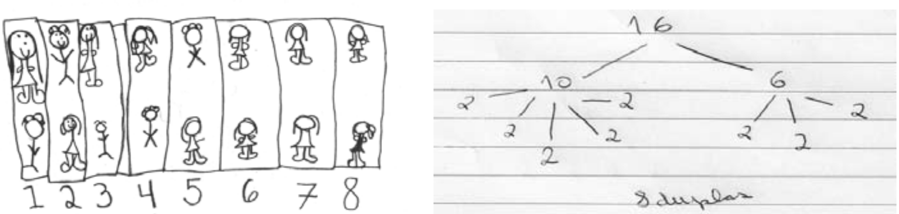


FIGURA 18

Cada aluno vai receber 5 cartelas para o jogo. Quantas cartelas eu tenho que ter?

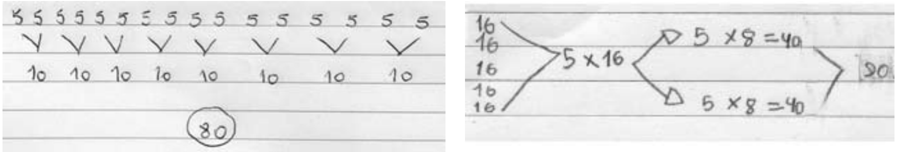


FIGURA 19

Cada uma das soluções apresentadas evidencia a criatividade das crianças e o uso intuitivo de importantes propriedades operatórias e de nosso sistema de numeração. Pense em cada uma delas. Você as aceitaria como solução destes problemas?

A maioria dos livros didáticos traz diferentes algoritmos para a realização das quatro operações fundamentais com números naturais. É importante que você, professor, experimente cada uma e planeje como tirar proveito delas. No entanto, o essencial é dar oportunidade para que as crianças recorram a conhecimentos prévios e tenham liberdade de criar estratégias próprias que – repetimos – devem ser discutidas e validadas. É possível que um procedimento não seja sempre válido. A discussão, a partir da comparação de diferentes procedimentos, contribui para que elas reconheçam as vantagens dos algoritmos convencionais que, posteriormente, devem ser apresentados, que não foram eleitos como os mais eficazes à toa.

Não é preciso pressa, mas ao final dos cinco anos iniciais do Ensino Fundamental as crianças devem ter tido diversas oportunidades de também aprenderem os algoritmos convencionais. Isso é importante para a continuidade dos estudos em Matemática e, aos poucos, eles devem ganhar agilidade na utilização deles. No entanto, não adianta usá-los sem compreendê-los, sem entender o que está por trás de cada passo executado. Só assim poderão utilizar tais algoritmos em casos reconhecidamente mais difíceis: para subtrair um número de outro que possui muitos zeros; nas multiplicações em que os dois fatores possuem mais do que um algarismo; nas divisões em que uma das ordens do quociente é igual a zero, dentre tantos outros casos.

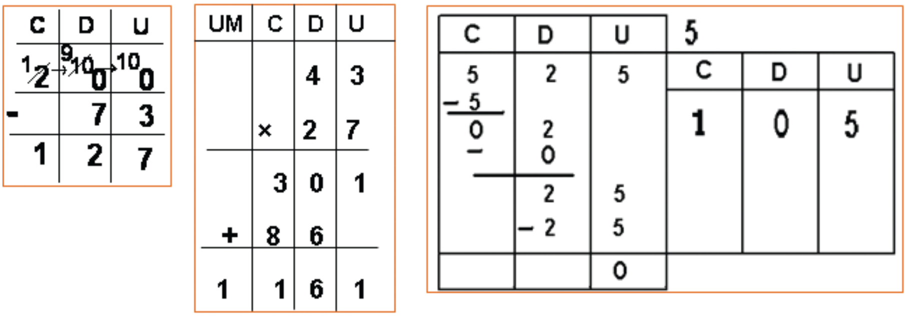


FIGURA 20

De nada adianta a criança recitar em voz alta cada passo de execução de um algoritmo se não estiver compreendendo o que diz! Pensemos em uma situação que parece bastante simples... Será que os alunos entendem realmente o que estão fazendo quando dizem "vai um"? Observe que nunca "vai um"! O que ocorre é um agrupamento de uma ordem para a imediatamente superior e, de fato, por isso "vão dez" (uma dezena), ou "vão cem" (uma centena), e assim por diante.

Se a adição tiver mais do que duas parcelas pode ocorrer um reagrupamento de mais do que uma dezena. Reagrupamentos deste tipo são frequentes na multiplicação.

FIGURA 21

Resumidamente, no ensino dos algoritmos convencionais, é bom lembrar que:

- Eles se baseiam em regras do sistema de numeração decimal e, por isso, faz diferença a organização dos números antes de iniciar o procedimento.
- O quadro valor de lugar ajuda os alunos a se organizarem, mas não é preciso obrigá-los a desenhar este tipo de quadro para sempre. As características do SND precisam ser sempre lembradas para justificar cada passo.

- O uso do material dourado é muito eficaz para a compreensão de cada passo do algoritmo. Podemos também usar palitos ou canudinhos para representar as unidades e amarrados dez em dez para representar as dezenas. O importante é que a criança possa recorrer ao material concreto para vivenciar e compreender o que está fazendo. Desenhar figuras que representam tais materiais não é eficaz e acaba desestimulando o trabalho.
- O ábaco também é um bom recurso didático para compreender os algoritmos da adição e da subtração. No entanto, visualizar a multiplicação ou a divisão com o ábaco não é simples e pouco ajuda a criança a compreender e justificar os passos destes algoritmos.

A reta numérica na compreensão dos números e das operações

A representação dos números em uma reta é um recurso extremamente valioso em Matemática. Pode ser utilizado pelo aluno em todos os níveis de ensino e crescer em importância à medida que este avança. É possível iniciar bem cedo experiências com este modelo, utilizando recursos concretos, como barbantes, passos sobre uma linha desenhada no chão, jogos de trilha etc. Para desenhar corretamente uma reta numérica é importante marcarmos os números naturais em intervalos iguais, como ilustrado abaixo. O número 1 passa, então, a ser representado por um ponto na reta, que dista uma unidade para a direita do zero, o número 2 pelo ponto que dista uma unidade para a direita do número 1, e assim sucessivamente...

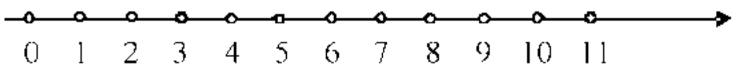


FIGURA 22

Observe que a reta numérica ajuda muito a compreender e visualizar a ordenação dos números naturais. Podemos usar diversas escalas (a distância entre os pontos marcados numa reta deve ser fixa, mas pode variar de uma reta para outra) e escolher quais pontos marcar (de 1 em 1, de 5 em 5, de 10 em 10).

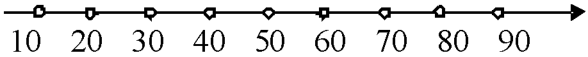


FIGURA 23

A compreensão das operações e o desenvolvimento de habilidades de cálculo mental são também favorecidos pela visualização que a reta numérica possibilita. Observe trabalhos de crianças recorrendo à reta numérica para a realização de cálculos.

Este exemplo mostra a solução apresentada por uma criança para um problema envolvendo o cálculo da diferença entre duas idades: 13 e 38 anos.

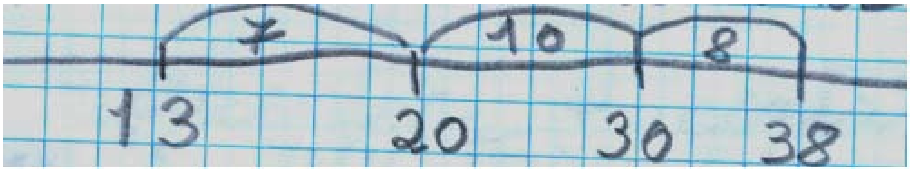


FIGURA 24

Este é um modelo usado para a representação do produto 4 × 3. A figura representa 3 saltos de comprimento 4.

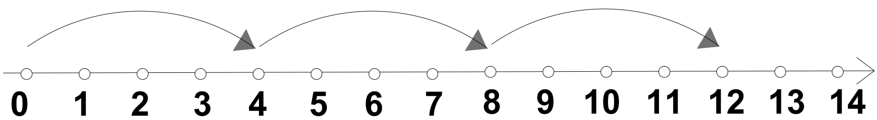


FIGURA 25

A reta numérica é também um ótimo recurso para tratar as frações como divisão de uma unidade (“todo”) em partes iguais. Neste caso, iniciamos considerando os intervalos entre dois números naturais marcados na reta numérica como o “todo”, que será subdividido em partes iguais. Para marcar, por exemplo, a fração $\frac{3}{5}$ na reta subdividimos o intervalo entre 0 e 1 em 5 partes iguais e cada uma destas partes corresponde a $\frac{1}{5}$ deste intervalo. Assim, fica mais fácil marcar $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, e até compreender melhor o significado da fração $\frac{5}{5}$.

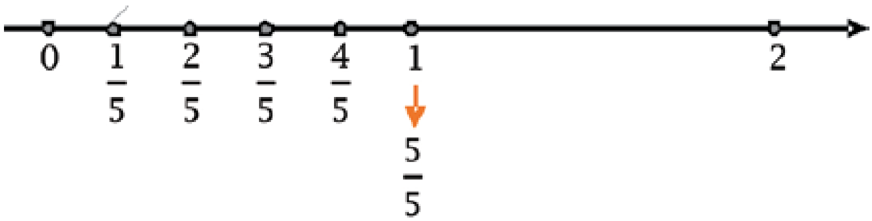


FIGURA 26

Representar frações na reta numérica contribui para a difícil passagem de seu estudo como feito até agora para sua concepção como números. É um bom recurso para observação de frações equivalentes e consolida a compreensão do significado de número misto e sua associação com frações impróprias.

Compare, no exemplo a seguir, a representação do número $\frac{8}{5}$ em dois suportes diferentes (reta numérica e retângulos hachurados). Representada na reta numérica, a fração $\frac{8}{5}$, que pode ser escrita como o número misto $1\frac{3}{5}$(um inteiro e três quintos), e fica claro que ela representa um número maior do que **1**. Já quando usamos os retângulos esta fração muitas vezes é confundida com a fração $\frac{8}{10}$. Isso ocorre se considerarmos, como na ilustração abaixo, os dois retângulos como um único "todo" que foi dividido em 10 partes iguais das quais 8 estão sendo consideradas (hachuradas). Observe que isso só é um erro, se tiver sido bem definido que o "todo" é apenas um dos retângulos.

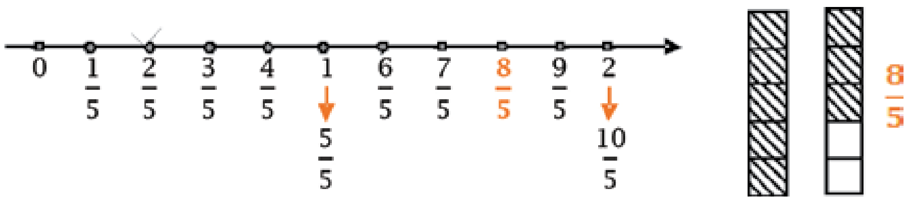


FIGURA 27

Considerações finais

Em pesquisa realizada com 116 professores[3] observamos que, na maioria das aulas, são abordados conteúdos do campo de **números**

[3] MANDARINO, Mônica Cerbella Freire. *Concepções de ensino da matemática elementar que emergem da prática docente*. Orientadores: João Bosco Pitombeira de Carvalho e Maria Apparecida Mamede. Rio de Janeiro: PUC, Departamento de Educação, 2006. Tese de doutorado.

e operações. Mesmo quando a atividade tem objetivos relacionados com outro campo da Matemática, observa-se que o trabalho acaba valorizando os números e as operações que podem ser feitos com eles. Por exemplo:

a) Em uma aula em que se estejam usando tabelas ou gráficos (campo do tratamento da informação) o trabalho recai, quase que exclusivamente, no uso dos dados disponíveis para fazer cálculos. O mesmo ocorre em atividades envolvendo grandezas, nas quais o mais comum é serem utilizadas medidas dadas ou obtidas pelos alunos para fazer conversões ou contas.

b) No caso de sobrar tempo de aula, ou como dever de casa, são propostas atividades de "arme e efetue".

Além disso, a seleção do que deve ser priorizado nos conteúdos evidencia a valorização de um saber procedimental, baseado em uma organização do conhecimento em etapas, com uma abordagem superficial e que exige pouco engajamento dos alunos.

Esta situação, certamente, está associada a um dos tipos dominantes de ensino da Matemática, como verificado por Thompson (1992), no qual o principal papel deste ensino é tornar os alunos capazes de dominar os números e os processos e algoritmos de sua manipulação para resolverem problemas de simples aplicação.

Diante disso, vale a pena destacar algumas recomendações que podem contribuir para uma mudança efetiva na construção dos conhecimentos matemáticos:

A construção do sistema de numeração decimal e as regularidades numéricas não podem se restringir a atividades mecânicas, como: *Decomponha*; *Escreva por extenso*; entre outras.

No campo das operações com números naturais, é preciso justificar os procedimentos de cálculo, que não devem ser apresentados como únicos; as propriedades numéricas e operatórias precisam ser enunciadas a partir de sua utilidade e do auxílio que nos fornecem para o cálculo mental; e o cálculo mental e por estimativa merecem ser mais valorizados, já que são recursos fundamentais para o cotidiano.

O trabalho com números racionais positivos, tanto na forma de fração quanto na notação decimal, não pode ficar restrito à representação de "todos" contínuos. É preciso explorar adequadamente os diferentes significados dos números racionais, além disso, a representação decimal dos números racionais se consolida por meio de associações claras com propriedades do sistema de numeração decimal, com o sistema métrico, para citar alguns exemplos.

Capítulo 7
Geometria

*Paulo Figueiredo Lima**
*João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho***

Uma das razões da importância da geometria é sua presença constante em nosso dia a dia. Já nos primeiros meses de vida, as crianças iniciam-se no aprendizado dos movimentos e no reconhecimento dos objetos do espaço em seu redor. O desenvolvimento motor e cognitivo posterior das pessoas vai permitir que elas exercitem competências geométricas cada vez mais elaboradas de localização, de reconhecimento de deslocamentos, de representação de objetos do mundo físico, de classificação das figuras geométricas e de sistematização do conhecimento nesse campo da Matemática. Além disso, a formação de nossos profissionais no campo da geometria é um imperativo ditado pelo desenvolvimento tecnológico e científico atual.

Historicamente, a geometria sempre ocupou um lugar de inegável destaque, desde as primeiras fases do desenvolvimento do saber matemático. As origens desse ramo da Matemática recuam a épocas muito antigas. Como todo saber humano, ele nasce e se desenvolve em um processo de interação com o contexto social. Hoje sabemos que as grandes civilizações antigas – chinesa, hindu, mesopotâmica, egípcia – possuíam muitas informações de natureza geométrica. E as aplicavam! Sabiam construir figuras planas e espaciais, conheciam relações entre as grandezas geométricas, calculavam comprimentos,

* Ph. D. em Matemática, Professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco.

** Ph. D. em Matemática. Professor visitante do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRJ.

áreas e volumes. Esses conhecimentos atendiam a necessidades socioeconômicas e culturais, tais como medição de propriedades rurais, construção de edificações, desenho de ornamentos etc. Não há registros históricos, no entanto, de que esses conhecimentos fossem sistematizados. Assim, eles permaneceram como um repertório de fatos e procedimentos pouco articulados. A civilização grega dos séculos 7 a.C. a 3 a.C. é tida, hoje, como a responsável pela organização da geometria como ciência dedutiva. Esse período é caracterizado pelo início do emprego do método axiomático[1], que se tornaria o modo científico de sistematização da Matemática.

Pelos motivos expostos, é indiscutível que a geometria é parte essencial do ensino e, por isso, convidamos o colega professor para refletir sobre este ramo da Matemática. Contudo, nos limites deste capítulo, não é possível abordar todo o campo da geometria escolar e, assim, escolhemos alguns temas que julgamos úteis para o professor dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Geometria e grandezas geométricas

Desde seus primórdios, o saber geométrico envolveu o que hoje podemos chamar de grandezas geométricas – comprimento, área, volume e abertura de ângulo. Isso explica porque alguns tratam essas grandezas como parte do campo da geometria.

Entretanto, seguindo as recomendações curriculares mais recentes, não só do Brasil, mas também de outros países, o estudo das grandezas geométricas tem sido incluído no campo das grandezas e medidas e não no da geometria. Uma das razões para essa escolha reside na necessidade de maior atenção ao ensino do conceito de grandeza em geral, e não apenas das geométricas.

Além disso, ao estudarmos as grandezas geométricas do ponto de vista das grandezas e medidas, alguns temas sobressaem como centrais. É o caso do processo de medição, que abrange a escolha das unidades, o conhecimento das relações entre elas, além do

[1] De modo muito simplificado, este método consiste em adotar conceitos primitivos (conceitos não definidos, tais como ponto, reta e plano) e axiomas (proposições não demonstradas, como "Por dois pontos passa uma única reta"). Com base nesses elementos, por via puramente lógica, são definidos conceitos derivados (por exemplo: ângulo, quadrado etc) e são deduzidas proposições que são os teoremas, como o Teorema de Pitágoras.

emprego dos instrumentos de medição. Em um olhar puramente geométrico, esses tópicos não são o foco da atenção. Por exemplo, em geometria, definimos quadrado como um quadrilátero que possui quatro ângulos retos e quatro lados de comprimentos iguais. Esta é a definição de um objeto abstrato, no qual não podemos efetuar medições com instrumentos concretos. Nos exemplos concretos de quadrados – desenhados ou construídos de algum material adequado – as medições fornecerão sempre igualdades aproximadas dos comprimentos dos lados e das aberturas dos ângulos em jogo. Além disso, no que se refere à definição geométrica, o comprimento do lado do quadrado pode ser concebido em centímetros, em metros, ou em qualquer outra unidade de comprimento.

Em suma, podemos dizer que o enfoque puramente geométrico das grandezas geométricas é mais abstrato que o enfoque adotado quando elas são estudadas ao lado de grandezas em geral, em seu campo curricular específico.

Por outro lado, é consenso que o estudo das grandezas geométricas é uma maneira privilegiada de se promover a ligação entre esses dois importantes campos da matemática escolar. Em consequência dessa conexão é que você encontrará muitos pontos de contato entre o presente capítulo e o dedicado às grandezas e medidas. O esquema a seguir procura ilustrar essas ideias.

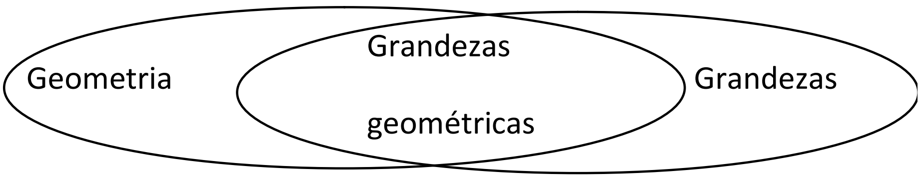


FIGURA 1

O esquema indica, também, que é possível abordar assuntos de geometria em que não intervêm necessariamente as grandezas geométricas – o paralelismo entre retas, por exemplo – e, por outro lado, estudam-se grandezas que não são geométricas, como a massa, a temperatura e o valor monetário.

Concreto e abstrato

Professor, ao iniciar o estudo da geometria com seus alunos, procure valorizar a movimentação corporal, além de possibilitar o manuseio e a visualização de objetos do mundo físico. São também importantes as atividades que envolvam as representações gráficas – desenhos e imagens – desses objetos. Essas experiências constituem-se nas primeiras explorações e abstrações do espaço que são fundamentais para a aprendizagem da geometria. Em particular, aquelas que envolvem as representações gráficas vão acompanhar o ensino e a aprendizagem durante toda a formação em geometria.

No entanto, as atividades de movimentação, manuseio, visualização e representação gráfica não são suficientes. Além delas, é imprescindível que, simultânea e progressivamente, sejam propostas, aos alunos, atividades que favoreçam o ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos associados aos fenômenos e aos objetos físicos, bem como às suas representações. É preciso lidar com os conceitos abstratos de ponto, reta, plano, semirreta, paralelismo, triângulo, polígono, semelhança e simetria, e tantos outros.

Tais conceitos, e as relações entre eles, nos fornecem modelos abstratos de objetos do mundo físico ou de representações gráficas de objetos físicos. Esses modelos – que são objetos matemáticos – fazem parte do conhecimento matemático sistematizado que deve ser adquirido ao longo das várias fases da escolaridade.

Assim, podemos dizer que temos três tipos de objetos:

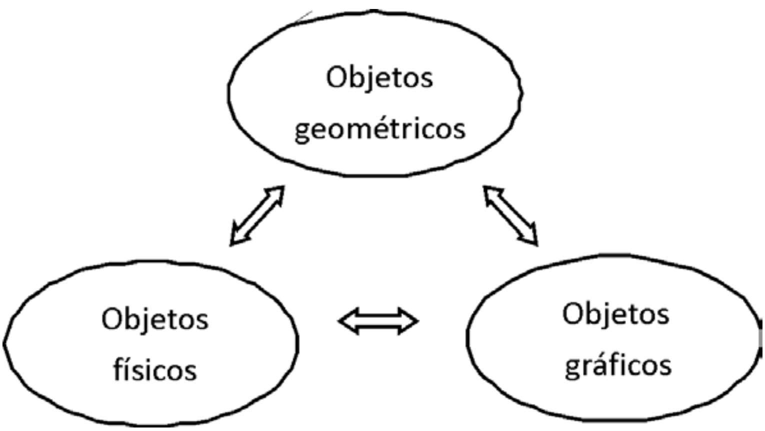


FIGURA 2

A passagem do físico, perceptível e palpável, para o abstrato, é um dos objetivos centrais do ensino e da aprendizagem da geometria, e isso nunca deve ser perdido de vista. Convém observar que os objetos gráficos – desenhos, imagens, diagramas, ícones – constituem-se em um importante nível intermediário de abstração entre os objetos físicos e as entidades puramente matemáticas.

Vale lembrar, também, que os objetos abstratos podem ser concebidos mentalmente, mas só podem ser representados imperfeitamente em duas ou três dimensões.

Para exemplificar, tomemos um dado de jogar, que é um objeto do mundo físico, confeccionado com certo material, e que pode ser visto e manuseado. Podemos representar graficamente o referido dado como na Figura 3.

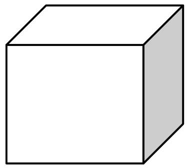


FIGURA 3

Como você pode observar, uma característica essencial dessas representações é que elas não são tridimensionais, mesmo quando o objeto correspondente é tridimensional. Isto quer dizer que qualquer desenho, qualquer imagem, de um dado em uma folha de papel possui apenas duas dimensões. Este fato implica que tais representações não conservam todas as propriedades geométricas dos objetos tridimensionais a elas associados. Por exemplo, faces de um cubo, em uma perspectiva, podem ser desenhadas como quadriláteros com ângulos não retos e não como quadrados. Além disso, é possível que os comprimentos de duas arestas no desenho do cubo não sejam iguais, o que não ocorre em um cubo.

Um dado ou sua representação gráfica pode ser associado a um modelo abstrato, o objeto matemático que, no caso, é um cubo. O dado ou a representação gráfica é perceptível pelos sentidos, mas o cubo não, pois é uma entidade ideal, concebida com base em definições e em raciocínios lógicos. Tais objetos matemáticos podem ser denominados **figuras geométricas**. Para designar figuras geométricas tais como o cubo, é frequente utilizarmos, também, a expressão **sólido geométrico**. Professor, você deve estar atento para o fato de que o termo 'sólido' na expressão acima não se refere ao estado sólido da Física; seu emprego aqui está ligado a objetos não materiais.

Além disso, na linguagem usual, em muitas situações, empregamos os mesmos termos para designar ora o objeto físico, ora sua representação gráfica, ora o conceito matemático. Um professor pode dizer *"O cubo cinza é o último da pilha"*, ao chamar a atenção para o desenho de vários cubos. Uma pessoa pode pedir que coloquem *"quatro cubos de gelo"* no seu copo com água. No primeiro exemplo, o professor está se referindo ao desenho de um cubo e não a um cubo; no segundo caso, os cubos de gelo dizem respeito a objetos físicos e não ao conceito matemático.

Devemos ter presente que não há nenhum erro no emprego dos termos mencionados no parágrafo anterior, pois o contexto em que são usados, quase sempre, tira a ambiguidade que possa surgir. O que importa é que, em sala de aula, o professor saiba, em cada caso, a que tipo de objeto o termo se refere. Afinal, no seu cotidiano, as crianças estão familiarizadas com o emprego das mesmas palavras para designar coisas diferentes.

Como principiar? Com o plano ou com o espaço?

As dimensões em geometria

As primeiras experiências sensoriais produzem, nos seres humanos, a percepção de um mundo tridimensional. São os deslocamentos no espaço, as impressões visuais e táteis ocorridos na presença dos objetos do mundo físico que vão constituindo progressivamente, em nós, as ideias de objetos tridimensionais, que ocupam posições em um espaço ambiente também tridimensional. Os modelos abstratos dos objetos tridimensionais, como dito anteriormente, são chamados de sólidos geométricos.

No entanto, simultaneamente, entramos em contato com objetos do mundo físico cujos modelos geométricos são concebidos como bidimensionais. De fato, os contornos dos objetos tridimensionais ao nosso redor são tomados como bidimensionais e chamados, em geometria, **superfícies**. O tampo de uma mesa sobre o qual podemos passar nossas mãos, cada face da folha de papel sobre a qual escrevemos ou desenhamos, são exemplos concretos de superfícies tidas como bidimensionais. Do mesmo modo, desprezando-se a espessura, podemos considerar bidimensional a "face" lateral de uma lata cilíndrica ou uma telha ondulada. No primeiro caso, temos **superfícies**

planas e no segundo, **superfícies não planas**. Se prosseguirmos nesta reflexão, observamos que há, também, no mundo que nos rodeia, objetos que, na geometria, são unidimensionais. As "quinas" das paredes em nossas casas, as arestas de uma caixa de sapatos são exemplos concretos de figuras geométricas unidimensionais, os **segmentos de reta**. Já o contorno de um CD ou um cordão sinuoso sobre uma mesa são materializações de **curvas**. Estas são curvas planas, mas há também as não planas como as bordas de muitas folhas de plantas. E não paramos aí. Quando nos deparamos com a "ponta" de um dado, que é o encontro de três de suas arestas, ou quando olhamos o ponto final que encerra a frase anterior, temos dois exemplos de objetos que, no mundo abstrato da geometria, estão associados a **pontos** e são considerados de dimensão zero.

Em suma, na geometria escolar, lidamos com figuras geométricas de dimensão 0, 1, 2 ou 3 e, também, com os objetos do mundo físico a elas associados.

Uma abordagem integrada

As reflexões apresentadas justificam a ideia de que, na formação geométrica inicial, devemos fazer uma abordagem integrada e simultânea das figuras geométricas de várias dimensões, em contraposição ao que se recomendou, durante algum tempo, que era partir das figuras unidimensionais, seguidas das bidimensionais e, depois, das tridimensionais.

Nessa abordagem integrada, desempenham um papel central os inúmeros jogos ou atividades com materiais concretos que podem ser experimentados na escola. Os jogos que envolvem movimento e localização das crianças, a montagem de modelos concretos de figuras geométricas com canudos de refrigerantes, com garrafas *pet* ou com sucata, e muitas outras atividades desse tipo devem ser estimulados no ensino. Cabe um lugar de destaque às atividades de desenho. Desde os rabiscos espontâneos, aos desenhos com o auxílio de instrumentos simples e adequados à faixa etária, existe um vasto repertório de atividades escolares que auxiliam a criança a representar os objetos ao seu redor e a compreender as propriedades geométricas das figuras desenhadas ou reproduzidas em imagens gráficas. Observemos o desenho (Figura 4), do jogo da amarelinha, feito por uma aluna do 2º ano do Ensino Fundamental:

FIGURA 4

Este desenho evidencia a ausência de perspectiva e de proporcionalidade entre os comprimentos reais e os do desenho, que são competências técnicas ainda não adquiridas por essa criança. Por outro lado, revela riqueza de detalhes e poder de representação da cena real, que pode ser identificada imediatamente com base no desenho.

Para ajudar as crianças a integrarem as figuras tridimensionais às de menor dimensão têm sido frequente as propostas de atividades de desenho de faces, de arestas e até mesmo de vértices de modelos concretos de poliedros:

FIGURA 5

As representações em geometria

A criança e o espaço que a cerca

Já dissemos que, desde cedo, as crianças começam o aprendizado dos movimentos, da localização e do reconhecimento de seres e de objetos do espaço em seu entorno. Essas são as primeiras percepções que ela experimenta em contato com o mundo. Cabe à escola o importante papel de organizar e aprofundar o conhecimento geométrico iniciado com essas percepções.

Um dos conteúdos centrais da formação na escola são as representações dos seres e dos objetos do espaço ao nosso redor. Tais representações podem ser obtidas com o auxílio de outros objetos tridimensionais, como os modelos de madeira, de papelão ou de outro material apropriado e, também, com apoio em maquetes.

No Ensino Fundamental, também são frequentes as atividades que empregam planificações para montagem de figuras espaciais, por meio de recorte e colagem. Tais atividades são importantes do ponto de vista da formação geométrica e, ainda, para o desenvolvimento de habilidades motoras na criança.

Devemos nos precaver para que os moldes com planificações levem em conta as habilidades motoras já adquiridas pelas crianças, no momento de recortar e colar esses moldes, durante a montagem dos sólidos geométricos. Tal cuidado, muitas vezes, não é observado pelos moldes presentes em muitos livros didáticos, o que prejudica muito a sua utilização pelas crianças.

Em todas as atividades mencionadas, o conhecimento geométrico é construído, gradativamente, com o auxílio de representações dos objetos do mundo físico oferecidas pelos modelos materiais ou por imagens gráficas.

Visualização e pensamento geométrico

Sabemos que as percepções provenientes dos movimentos e dos sentidos do tato e da visão cumprem uma função fundamental na constituição de nosso pensamento geométrico. Por brevidade, aqui comentaremos apenas algumas questões que envolvem mais diretamente o sentido da visão.

O seu papel na formação do pensamento geométrico está relacionado a duas capacidades estreitamente interdependentes, a seguir comentadas.

De um lado, captar e interpretar as informações provenientes do mundo que nos cerca e que são mediadas pela visão humana, bem como constituir imagens mentais e ideias baseadas nessas informações. Por outro lado, traduzir as imagens mentais e as ideias em objetos visíveis. De forma simplificada, podemos dizer que a primeira é a capacidade de **ver** os objetos (físicos ou gráficos), o movimento e o espaço físico e de **gerar imagens mentais**. Por exemplo, ao olharmos uma bola de futebol criamos a imagem mental de um objeto com propriedades bem especiais, apropriadas para realizar movimentos muito variados e que o torna propício à prática daquele esporte. Mas, também, podemos fazer a imagem mental de um objeto geométrico – uma superfície esférica – que é uma abstração da bola de futebol e é definido como a superfície no espaço tridimensional constituída pelos pontos que distam igualmente de um ponto dado.

A segunda capacidade é a de **tornar visíveis** nossas ideias e imagens mentais, por meio de objetos físicos ou de representações gráficas. Por exemplo, podemos considerar o esquema apresentado na Figura 1 como uma maneira de tornar visíveis as relações abstratas entre o campo das grandezas e medidas e o da geometria.

Esta última capacidade tem sido denominada, em muitos campos científicos, de **visualização**, embora, em outros, também a primeira delas receba a mesma denominação. O que podemos dizer, sem dúvida, é que a formação do pensamento geométrico das pessoas dotadas de visão é inseparável dessas duas capacidades.

Vejamos uma atividade em que interagem as duas capacidades mencionadas. Ela refere-se à comparação de comprimentos em objetos físicos por meios visuais: colocamos objetos alongados **a diferentes distâncias** de uma criança e pedimos para ela indicar o mais comprido. Em seguida, colocamos em suas mãos os mesmos objetos e solicitamos que ela verifique o acerto ou não de sua resposta inicial. Os modelos científicos propostos para compreender a visão humana nos dizem que o comprimento que estimamos visualmente para um objeto depende da distância que nos separa desse objeto. Dessa forma, a criança poderá fazer uma imagem mental de que certo objeto é o mais comprido da coleção fornecida, baseada na informação visual. Tal ideia será confirmada ou não quando ela procurar efetuar a comparação por manuseio e justaposição dos objetos. Nesta ação, ela vai se familiarizar com a ideia de comparação de objetos alongados. Um possível conflito entre a resposta inicial e a verificação posterior, pode ser um recurso didático para que a criança seja iniciada ao conhecimento científico envolvido no experimento.

Um segundo tipo de exemplo de interação das duas capacidades referidas é relacionado com as atividades de representação gráfica de objetos tridimensionais por meio de desenhos. A importância dessas atividades para a formação geométrica é tão grande que nos deteremos um pouco mais sobre ela.

A representação plana de objetos espaciais

Quando vemos um objeto espacial e procuramos reproduzi-lo por intermédio de um desenho em uma folha de papel estamos realizando uma operação bastante complexa, do ponto de vista cognitivo. Entre outros aspectos, porque o desenho é feito em uma superfície plana, enquanto o objeto é espacial e isso gera, necessariamente, uma "perda de informação" sobre o objeto representado. Em outras palavras, o que desenhamos, com certeza, não é o objeto, nem é, possivelmente, a imagem mental que dele fazemos ao vê-lo.

Só muito lentamente, ao longo da história, o homem criou técnicas de representação gráfica, em particular, inventou os vários tipos de **perspectiva**, para tornar mais próximo o que se vê no desenho daquilo que se observa no objeto visto. Nas ilustrações dos livros de Matemática, uma das técnicas mais utilizadas é a denominada perspectiva cavaleira. Ela consiste na projeção paralela oblíqua, em um plano, do objeto a representar como está indicado na Figura 6. Nesta figura, para comparação, também é feita uma projeção paralela ortogonal do objeto.

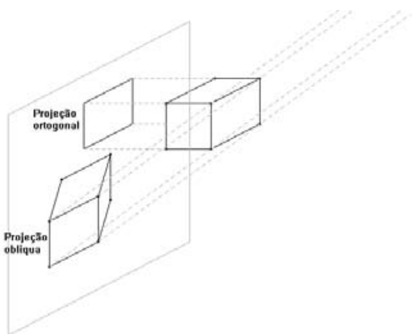


FIGURA 6

As projeções paralelas ortogonais ao plano de projeção, a exemplo da que foi apresentada na Figura 6, formam o que se convencionou chamar de **vistas**. Na figura 7, são indicadas duas vistas de um bloco retangular. No desenho à esquerda podemos ver como as vistas frontal e superior do objeto são produzidas, por meio de projeções ortogonais, enquanto à direita estão representadas as duas vistas obtidas.

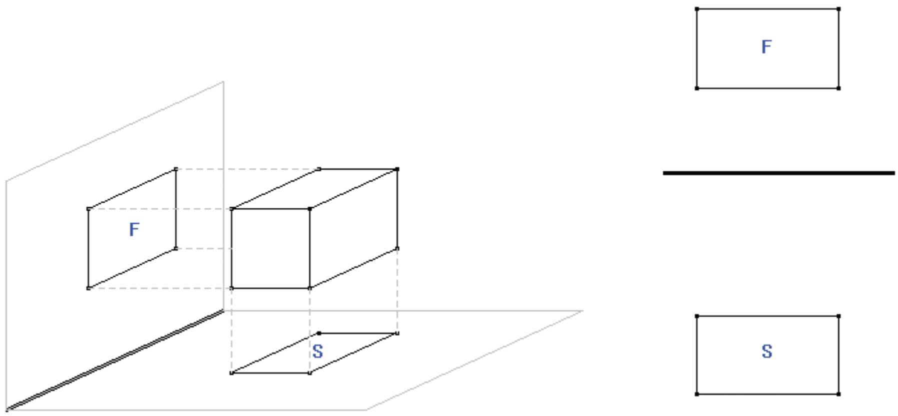
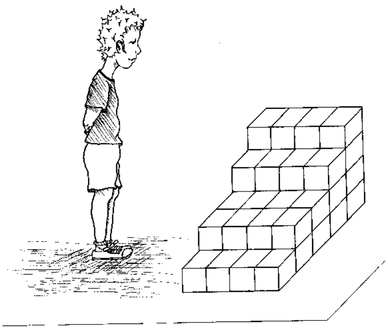


FIGURA 7

Dadas as dificuldades conceituais envolvidas nos desenhos em perspectiva, a introdução deste conteúdo nos primeiros anos do Ensino Fundamental deve ser extremamente gradual e cuidadosa. Em particular, devem ser evitadas algumas abordagens inadequadas hoje adotadas no ensino e que, infelizmente, são encontradas em alguns livros didáticos.

A primeira delas é a de induzir a ideia de que as perspectivas são o que **o observador vê**. Neste caso, no desenho de um objeto em perspectiva cavaleira o observador deveria estar localizado a uma distância infinita desse objeto, o que é impossível. Na verdade, uma perspectiva nos fornece **uma aproximação de como o observador vê** o objeto. Esta inadequação é mais frequente quando se trata da questão das vistas (frontal, superior, posterior, laterais), certamente influenciada pelo significado usual do termo ‘vista’. Tal falha é agravada quando, por exemplo, uma “vista superior” de um objeto é apresentada como “o que Pedro vê” em uma situação como a da Figura 8.



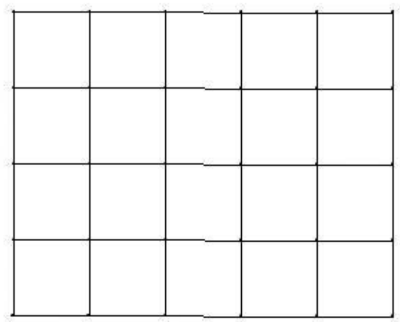


FIGURA 8

Outra inadequação frequente é solicitar do aluno a comparação de comprimentos (ou distâncias) em objetos (ou cenas) desenhados em perspectiva. Sabemos que, em um desenho em perspectiva, comprimentos iguais nos objetos (ou cenas) podem ser representados por comprimentos diferentes no desenho.

Apesar disso, pode ser feito um trabalho didático importante para que a criança desenvolva a capacidade de representação, no plano, de sólidos geométricos. Isso significa, por um lado, levar a criança a ser capaz de fazer no plano um desenho que represente uma figura espacial, e por outro lado, a saber identificar, a partir de desenhos, qual a figura representada.

Um recurso que pode ser empregado são as malhas quadradas para a representação em cavaleira de objetos como na Figura 9.

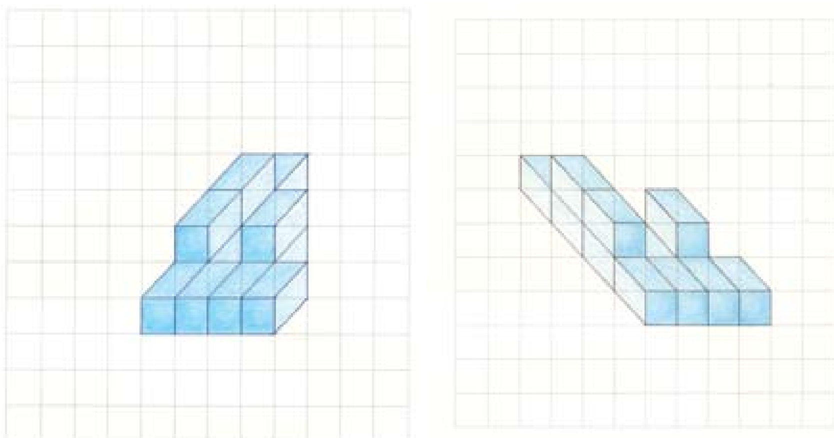


FIGURA 9

Vemos, na figura 9, dois desenhos em perspectiva cavaleira do mesmo conjunto de cubos. Seria inadequado dizermos que são as visões de dois observadores em posições distintas olhando para o mesmo objeto. Na verdade, trata-se, de uma técnica de representação “artificial” e apenas **aproximada** da visão real desses objetos por observadores.

O mesmo bloco de cubos é representado por suas vistas na ilustração seguinte:

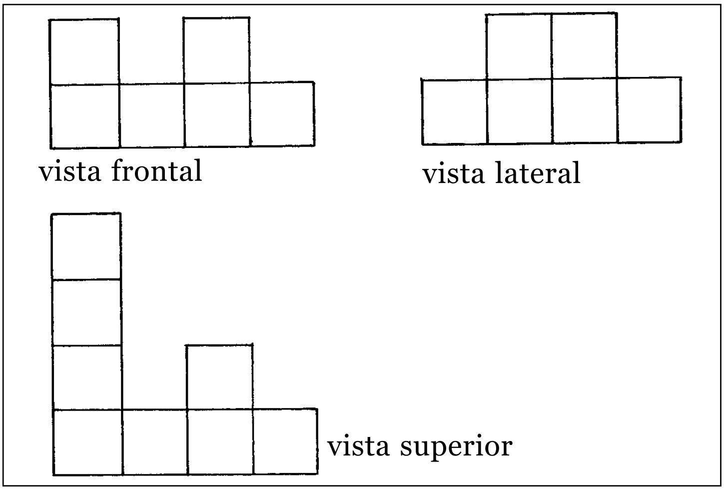


FIGURA 10

Tomemos o exemplo de outro bloco de cubos e suas vistas correspondentes:

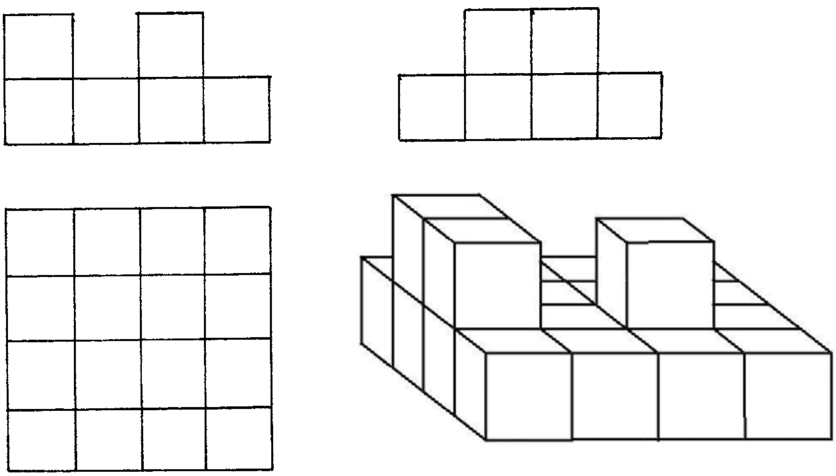


FIGURA 11

Observe que os sólidos geométricos representados nas Figuras 10 e 11 só diferem um do outro pelas suas respectivas vistas superiores. Por isso, as atividades – importantes, mas difíceis – que visam solicitar ao aluno que reconstrua a figura espacial com base em suas vistas devem ser planejadas cuidadosamente. Recomenda-se que fiquem restritas aos últimos anos desta primeira fase do Ensino Fundamental e, além disso, sejam fornecidas outras informações visuais ao aluno, como, por exemplo, perspectivas adicionais do mesmo objeto.

Infelizmente, em alguns livros didáticos, pede-se para o aluno identificar ou desenhar uma figura espacial a partir de somente uma ou duas de suas vistas, sem menção de que pode haver mais de uma figura com as vistas mostradas, como acabamos de mostrar.

Localização e orientação

Os movimentos da criança, a exploração do espaço e as interações propiciadas pelas diversas formas de linguagem caracterizam a fase inicial, espontânea, da aquisição das competências geométricas. Essas primeiras aquisições permitem à criança localizar objetos, observar os seus deslocamentos e, também, situar-se no seu entorno físico.

Em geometria, a noção de **referencial** é básica em todas as atividades que envolvem localização e movimento. Reconhecer se um objeto ou uma pessoa está longe ou perto, em cima ou embaixo, à direita ou à esquerda, requer que se estabeleça sempre outro objeto ou pessoa como referência: *longe ou perto da casa de Maria*; *em cima ou embaixo da mesa*; *à direita ou à esquerda de Pedro*. Como ocorre com muitas noções básicas, o referencial é tão enraizado nas atividades que envolvem a localização e o movimento, que ele acaba por ficar implícito em nossas falas. Nesses casos, sempre cabe ao contexto tornar claro ao interlocutor qual o referencial tomado em uma determinada situação. Um exemplo típico são as atividades propostas em livros didáticos nas quais se pede que seja indicado um objeto à direita da porta. Neste caso, um referencial implícito é o leitor da página do livro.

A despeito de ser comum na linguagem do dia a dia a ausência de explicitação do referencial, o professor de Matemática e o texto didático devem ser muito cautelosos nesse aspecto. Por exemplo, em livros didáticos, a omissão do referencial em determinada atividade proposta pode prejudicá-la seriamente.

Outra tarefa importante no ensino escolar é levar a criança a adquirir competências mais elaboradas de localização de objetos e de observação de deslocamentos deles, com o apoio de representações gráficas como os croquis, as plantas e os mapas.

É comum encontrarmos, em livros didáticos, propostas para que a criança trace percursos em mapas ou em malhas quadriculadas. Em muitas delas, porém, incorre-se na falha de confundir quem está sendo tomado como referência: o personagem na ilustração ou o leitor do livro. Vejamos um exemplo. Pede-se ao aluno para traçar a figura geométrica que resulta das seguintes instruções:

- cada lado da malha é um passo;
- sair do ponto A e andar 4 passos para a direita;
- em seguida: 5 passos para cima; 2 passos para a esquerda; 2 passos para baixo; 2 passos para a esquerda; e 3 passos para baixo.

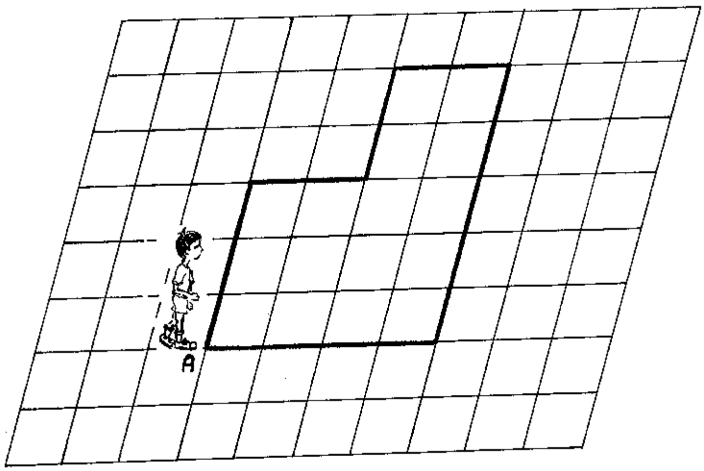


FIGURA 12

Na Figura 12, está ressaltado o traçado esperado na atividade. Mas, em sua resolução pode ficar a dúvida sobre o referencial: é o leitor ou a criança da ilustração? Se for esta última, os comandos do enunciado não levam ao caminho apresentado como resposta. Ambiguidades deste tipo podem ser prejudiciais à aprendizagem.

Um tipo de atividade importante e muito frequente nos livros didáticos envolve as malhas quadriculadas e o plano cartesiano para localização de pontos ou de regiões. Podemos solicitar que o aluno localize o ponto de coordenadas (3,4), ou em linguagem coloquial, o ponto com "endereço" (3,4), na malha ao lado:

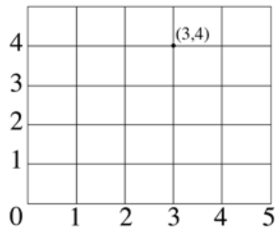


FIGURA 13

Jogos do tipo *Batalha naval*, que são muito populares, também utilizam codificação análoga à que é apresentada acima e podem ser empregados em sala de aula. Você percebe, nesses casos, que a identificação das células que compõem o quadriculado baseia-se na localização de intervalos e não de pontos. Em alguns casos, os mapas são divididos em retângulos e a forma de localização desses retângulos é do mesmo tipo que a do exemplo da Figura 14.

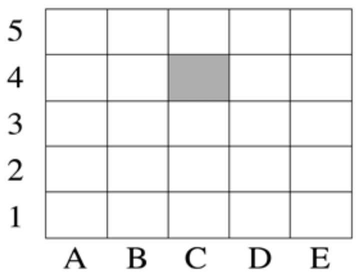


FIGURA 14

Precisamos ficar atentos a atividades envolvendo malhas ou o plano cartesiano como as apresentadas. Nessas, muitas vezes, as coordenadas de pontos nos eixos (horizontal e vertical) são confundidas erradamente com as identificações dos intervalos nesses eixos.

Classificação e nomenclatura de figuras geométricas

Um objetivo importante do ensino é auxiliar o aluno a desenvolver a capacidade de organizar as figuras em classes – **classificar** –, com base em propriedades comuns observadas nas figuras geométricas. Outro objetivo relevante é contribuir para que ele adquira, com compreensão, a **nomenclatura** técnica associada a tais classes. Esses dois propósitos devem ser buscados desde os primeiro anos da vida escolar e, certamente, se estendem por um longo período de aprendizagem.

No entanto, no início do estudo da geometria, o ideal é que as classificações e a nomenclatura sejam introduzidas com moderação e gradualmente. Nessa fase, um trabalho mais produtivo é aquele que auxilie a criança a se familiarizar com as figuras geométricas para que ela, aos poucos, vá percebendo suas propriedades. Além de habituá-la a reconhecer figuras geométricas e a desenhá-las, é importante realizar atividades de construção dessas figuras, utilizando, por exemplo, canudos de refrigerante, arames e cordões, varetas de madeira, colagem de recortes de papel, dobraduras, embalagens ou outros materiais de uso comum. A percepção visual e tátil das crianças em contato com esses objetos físicos, e com os desenhos, a auxiliam a compreender, progressivamente, as propriedades abstratas das diferentes figuras geométricas.

Os primeiros conceitos

De início, o colega professor deve cuidar para não "cair na tentação" de definir os **termos primitivos** da geometria, em particular, ponto, reta e plano. Tais termos são chamados primitivos precisamente por não terem definição. O que podemos fazer, sem dúvida, é mostrar, no mundo que nos cerca, exemplos concretos que representem de maneira aproximada esses objetos abstratos. Para isso, um recurso útil é explorar os vértices, as arestas e as faces de objetos físicos. Esses elementos nos fornecem exemplos materiais de pontos, de segmentos de reta e de regiões planas limitadas e auxiliam a compreensão das entidades abstratas que representam.

Outra precaução a tomar no trabalho de classificação das figuras geométricas é o de sempre deixar explícita para o aluno qualquer mudança de critérios. Quando essa troca não fica clara, um dos possíveis frutos esperados desse trabalho, que é o desenvolvimento do raciocínio lógico, pode ser prejudicado. Vejamos um exemplo.

Em geral, um ângulo é definido como a figura constituída por **duas semirretas**, distintas e não opostas, com uma mesma origem, como aparece no desenho a seguir:

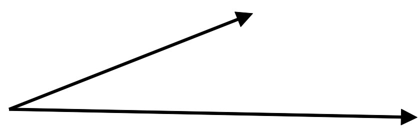


FIGURA 15

No entanto, alguns professores escolhem definir ângulo como a figura constituída pelos pontos que estão em duas semirretas, distintas e não opostas, com uma mesma origem, reunidos com os pontos da região do plano delimitada por essas semirretas, como no desenho (figura 16).

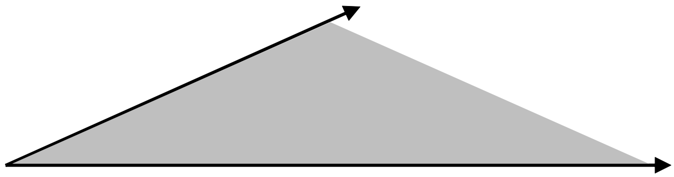


FIGURA 16

Podemos ficar em dúvida sobre qual definição escolher. Na verdade, as duas são matematicamente corretas, embora a primeira seja a adotada mais frequentemente. O que se deve evitar é passar de uma para outra sem nenhuma explicitação da mudança. Professor, caso você queira, é possível até aproveitar a oportunidade para mostrar como essas duas formulações estão relacionadas entre si. De fato, na primeira, as duas semirretas são o **contorno** do conjunto tomado como ângulo na segunda definição. Já na segunda, o ângulo inclui, além das semirretas, o **interior** da figura por elas formada. No entanto, podemos gerar confusão e insegurança nos alunos se usarmos simultaneamente as duas definições, sem distingui-las e relacioná-las. Convém lembrar, também, que, no passo seguinte da aprendizagem do conceito de ângulo, quando se introduz a noção de **medida da abertura do ângulo** (o que comumente denominamos de **medida do ângulo)** as duas definições são equivalentes, pois em ambos os casos – semirretas ou região – a medida do ângulo é a mesma, o que aproxima ainda as duas definições possíveis.

Triângulos e quadriláteros

Dentre as figuras geométricas, os **triângulos** estão, sem dúvida, entre as mais importantes. Eles podem se constituir em “células básicas” para a construção de muitas das figuras que estudamos na geometria e, além disso, escondem, na sua aparente simplicidade, uma enorme riqueza de propriedades matemáticas. Por isso, vale a pena explorá-los desde os primeiros anos da escolaridade.

A definição de triângulo é muito conhecida. Tomamos três pontos A, B e C, que não pertençam a uma mesma reta e os ligamos pelos três segmentos de reta AB, BC e CA. A reunião dos três segmentos é o que se chama um triângulo. Observamos, ainda, que dois segmentos quaisquer no triângulo só possuem em comum suas extremidades:

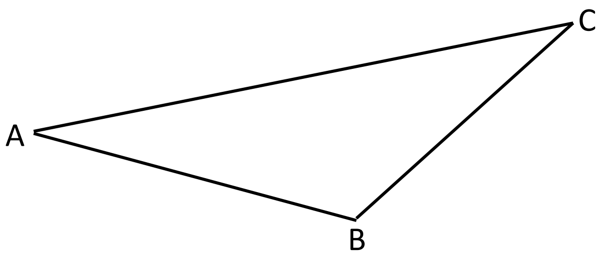


FIGURA 17

Sabemos que os pontos A, B e C são os vértices do triângulo e os segmentos de reta AB, BC e CA[2] são seus lados. Se imaginarmos as semirretas determinadas pelos **lados** do triângulo, obtemos o que se chamam os **ângulos** internos do triângulo, os quais, muitas vezes, denominamos, para simplificar, ângulos do triângulo. Para designar o triângulo exemplificado podemos escrever: triângulo ABC. Mas, é igualmente válido designá-lo utilizando os símbolos: BCA; CAB; ACB; CBA; e BAC.

Vejamos, agora, o que são quadriláteros. Consideremos quatro pontos arbitrários em um plano, por exemplo, A, B, C, D, com a condição de que três quaisquer deles não estão em uma mesma reta. Chamamos quadrilátero ABCD[3] ao conjunto de pontos que estão nos segmentos de reta AB, BC, CD e DA. A seguir, são mostrados dois exemplos:

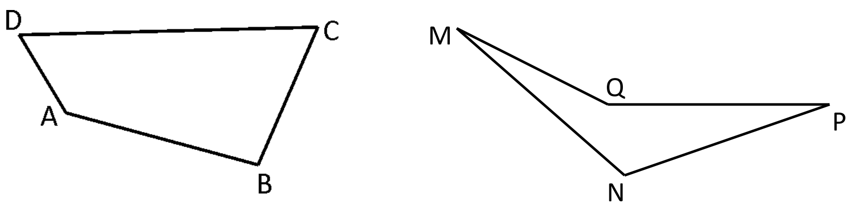


FIGURA 18

[2] Convém observar que um segmento de reta AB é o conjunto de pontos da reta definida pelos pontos A e B, constituído por A, B e todos os pontos entre A e B. Desta maneira, não importa a ordem dos pontos na representação do segmento. Em outras palavras, o segmento AB é o mesmo que o segmento BA. Se quisermos levar em conta a ordem desses pontos, temos um novo conceito: segmento de reta orientado, que não será considerado neste texto.

[3] Levando em conta a nota de rodapé 2, convém observar que podemos também designar este quadrilátero por outras sequências apropriadas dos símbolos A, B, C e D.

Na geometria, alguns quadriláteros destacam-se e recebem nomes especiais:

- quadrados – os lados são iguais entre si e os ângulos são retos;
- losangos – os lados são iguais entre si;
- retângulos – os quatro ângulos são retos;
- paralelogramos – os dois pares de lados opostos são paralelos entre si;
- trapézios – dois lados opostos são paralelos entre si.

Segundo os critérios acima, que são os adotados na matemática mais avançada, podemos dizer que todo quadrado é, também, losango, retângulo, paralelogramo e trapézio. Em tal classificação, todo paralelogramo é, também, trapézio.

No entanto, no Ensino Fundamental é muito comum, e justificável, serem adotadas outras caracterizações:

- quadrados – os lados são iguais entre si e os ângulos são retos;
- losangos – os lados são iguais entre si e os ângulos não são retos;
- retângulos – os ângulos são retos e há dois lados desiguais;
- paralelogramos – os dois pares de lados opostos são paralelos entre si;
- trapézios – apenas dois lados opostos são paralelos entre si.

De acordo com esta última classificação, um quadrado não é retângulo, nem losango. Tampouco um paralelogramo é trapézio. Mas o professor não deve ficar confuso com essas possibilidades de diferentes definições. O importante é procurar manter a coerência interna, após fazer sua escolha, para não dificultar a aprendizagem do aluno.

Polígonos

Os triângulos e quadriláteros são exemplos de polígonos. No entanto, professor, você não deve se preocupar em principiar pela definição de polígonos e depois tratar os triângulos como "polígonos de três lados" e os quadriláteros como "polígonos de quatro lados". Esta abordagem não é aconselhável do ponto de vista da didática. Além disso, os triângulos e quadriláteros são particularmente importantes em si mesmos e possuem uma caracterização mais simples do que a de um polígono mais geral.

Para caracterizar a classe mais ampla dos polígonos, uma boa estratégia é iniciarmos por um conceito preliminar. Segundo este conceito, uma linha poligonal (ou linha quebrada) é uma sequência especial de segmentos de reta, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_5A_6 ou B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, B_5B_6, B_6B_7, como mostrado nos exemplos a seguir:

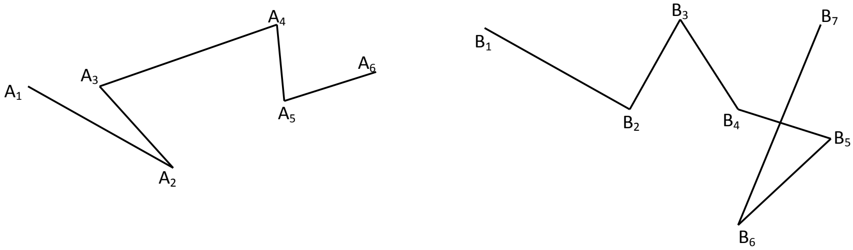


FIGURA 19

Esses exemplos são típicos de linhas poligonais: cada um dos segmentos e o seu sucessor na sequência têm em comum uma de suas extremidades e não são partes de uma mesma reta. No entanto, as duas poligonais acima distinguem-se em um aspecto. Na imagem à esquerda, cada segmento encontra (em suas extremidades) apenas seu antecessor ou seu sucessor imediatos na sequência de segmentos e, por isso, é chamada uma linha poligonal **simples**. Na imagem à direita, o segmento B_4B_5 encontra não apenas seu antecessor ou seu sucessor imediatos, mas também o segmento B_6B_7. Neste caso, dizemos que a poligonal é **não simples**. Os sucessivos segmentos da poligonal são os seus **lados** e os pontos de encontro dos segmentos são seus **vértices**.

Um **polígono é uma linha poligonal simples e fechada**, ou seja, uma linha poligonal simples em que o primeiro segmento da sequência tem uma extremidade em comum com o último segmento dessa sequência.

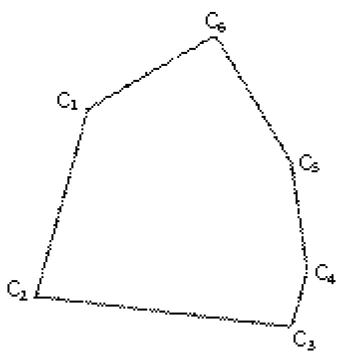


FIGURA 20

Muitas vezes, no ensino, são esquecidas algumas das condições que definem um polígono, o que pode dar margem a equívocos. Por exemplo, se dissermos que um polígono é uma figura formada apenas por segmentos de reta, esta afirmação é só parcialmente correta, pois as linhas poligonais que mostramos na Figura 19 satisfazem a esta condição e não são polígonos. Não podemos, também, esquecer que um polígono tem que ser uma linha poligonal simples.

Nesta altura, convém observar um fato análogo ao que ocorre com a definição de ângulo. Um polígono separa o plano em duas regiões, o seu **interior** e o seu **exterior**. Em geometria, utiliza-se a mesma palavra 'polígono' tanto para denominar a figura constituída apenas pelos seus lados, conforme a definição acima, quanto para designar a reunião desses lados com a região interior por eles determinada no plano.

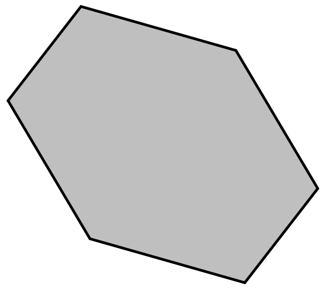


FIGURA 21

O colega professor deve levar em conta essa duplicidade de definição de polígono e, em cada situação, procurar esclarecer qual delas está sendo adotada. Por exemplo, ao tratarmos do **perímetro** do polígono, o que está em jogo é o comprimento total de seus lados. Quando falamos de **área** do polígono, estamos nos referindo ao polígono como uma região plana. Esse fato pode ser visto não como um empecilho para aprendizagem da criança, mas como uma flexibilidade natural da linguagem, que deve ser explorada no ensino.

A classificação mais comum dos polígonos é a que os separa pelo **número de lados** (que é igual ao número de seus ângulos). Neste caso, vamos encontrar, então, os **triângulos**, os **quadriláteros**, **pentágonos**, **hexágonos**, e assim por diante. No entanto, tais denominações devem ser aprendidas com a prática, e não com tentativas de memorização descontextualizadas. O melhor é que, aos poucos, as crianças aprendam a usar essas palavras em sua fala, sem a imposição de memorização precoce.

Outro critério de classificação de polígonos abordado no Ensino Fundamental é aquela que os reparte em duas categorias: os polígonos **convexos** e os **não convexos**. Façamos o seguinte teste: **para cada um dos lados do polígono**, imaginemos uma reta contendo esse lado e verifiquemos se o restante do polígono fica contido em um mesmo semiplano determinado por essa reta. Se isto acontecer, dizemos que o polígono é convexo. Se houver pelo menos um lado que não “passa nesse teste”, o polígono não é convexo. Vejamos dois exemplos, o da esquerda de um polígono convexo e o da direita de um não convexo:

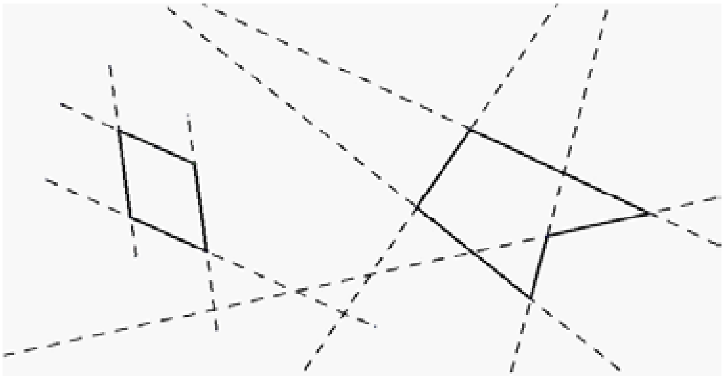


FIGURA 22

No polígono da direita na Figura 22, três lados “passam no teste”, mas dois deles não. De maneira simplificada, podemos dizer que um polígono não convexo possui alguma “reentrância”.

Uma família destacada de polígonos convexos são os **polígonos regulares**, aqueles em que:

- os lados são iguais entre si;
- os ângulos internos são iguais entre si.

Poderíamos nos perguntar se não podemos exigir apenas uma das condições acima para termos um polígono regular. No caso muito especial do triângulo, pode-se demonstrar que, se ele tem os lados todos iguais, então seus ângulos internos são todos iguais, e reciprocamente, se ele tem seus ângulos internos todos iguais, então seus lados são todos iguais. Desta maneira, para triângulos, basta exigir uns dos itens acima, pois o outro “vem de graça”.

No entanto, nos polígonos com mais de três lados (quadriláteros, pentágonos, hexágonos, etc.), é preciso verificar as duas condições para termos um polígono regular. De fato, vejamos os exemplos:

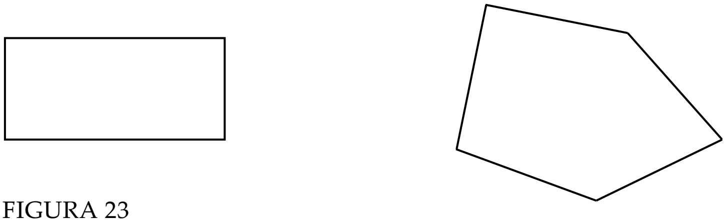


FIGURA 23

No exemplo à esquerda, é indicado um retângulo com lados de comprimentos diferentes e sabemos que ele possui os quatro ângulos iguais entre si, enquanto o pentágono, à direita, possui os lados iguais entre si, mas seus ângulos internos não são iguais.

Depois de refletir sobre figuras geométricas planas, vamos nos voltar, agora, para as espaciais.

Sólidos geométricos

Como no caso das figuras planas, é desejável que comecemos o estudo dos sólidos geométricos por aqueles em que a simplicidade é acompanhada da riqueza de propriedades, além de serem modelos para objetos comuns no nosso dia a dia. Dentre essas figuras geométricas destacam-se o **cubo** e o paralelepípedo retângulo, este último também chamado de **bloco retangular**. Uma definição mais rigorosa desses sólidos geométricos é desnecessária no Ensino Fundamental, e podemos nos contentar em dizer que um cubo é um conjunto de seis quadrados que têm, dois a dois, um lado em comum juntamente com a região do espaço tridimensional limitada por esses quadrados. É possível adotar uma definição análoga para o bloco retangular, apenas substituindo quadrados por retângulos:

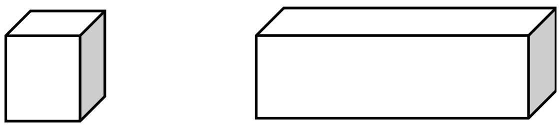


FIGURA 24

Os polígonos que limitam esses sólidos são suas **faces** – não são "lados" – o encontro de duas faces é uma **aresta** e o encontro de arestas são os **vértices** do sólido.

Convém observar que, na definição dos sólidos geométricos, como acontece nos exemplos mencionados, optamos, neste texto, por considerar não apenas as superfícies que limitam uma região do espaço, mas também essa região.[4] No contexto dos modelos

[4] Quando tratamos do polígono, escolhemos defini-lo como uma **linha poligonal** simples e fechada, mas advertimos que um polígono pode ser definido, alternativamente, como uma linha poligonal simples e fechada juntamente com a **região do plano** interior a essa linha. Nesta última alternativa, a linha poligonal simples e fechada é o contorno da região. No caso dos poliedros, escolhemos começar pela **região do espaço** reunida com seu contorno e alertar que este contorno, que é constituído por um conjunto particular de **superfícies,** também pode ser definido como poliedro.

concretos dessas figuras, ou seja, nos objetos físicos associados a elas, estamos considerando, desta maneira, objetos maciços ou, no caso dos objetos ocos, não apenas a "casca", mas também o seu interior. Estamos falando, por exemplo, de um dado de jogar, de um bloco maciço de madeira ou de uma caixa de sapatos vazia juntamente com o seu interior.

Apesar de termos feito a escolha acima, é possível definir "cubo" ou "bloco retangular", como sendo não a região do espaço totalmente delimitada por suas faces, mas as faces apenas. Em outros termos, não o "miolo" junto com a "casca", mas apenas a "casca". Essa flexibilidade da linguagem matemática pode ser explorada de forma adequada deixando claro, em cada caso, de que objeto geométrico estamos falando. Quando nos referimos ao volume do bloco retangular, é a região do espaço que importa. Quando pedimos a área da superfície lateral de um bloco retangular, é a soma das áreas de suas faces que entra em jogo. Quando propomos uma atividade de planificação de um cubo ou de um paralelepípedo retângulo o que está em foco é o conjunto de faces, é a "casca" e não, evidentemente, a região do espaço tridimensional limitada pelas faces.

Outras figuras geométricas estudadas desde cedo na escola são os **poliedros**. De maneira informal, podemos dizer que tais figuras espaciais são constituídas por um número finito de polígonos os quais têm cada um de seus lados em comum com um só lado de outro polígono, juntamente com a região do espaço delimitada por esses polígonos. As várias definições dos elementos e as observações sobre a nomenclatura que foram feitas para os dois exemplos de poliedro acima mencionados – o cubo e o bloco retangular – valem para os demais poliedros. Entre estes, ganham nomes especiais os prismas (à esquerda) e as pirâmides:

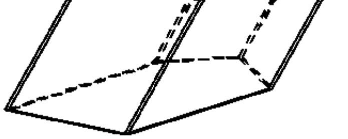


FIGURA 25

Os poliedros não são as únicas figuras geométricas que são estudadas na escola básica. Deparamo-nos, no dia a dia, com objetos que podem ser associados aos chamados **sólidos redondos** (ou **corpos redondos**): cilindros, cones, esferas:

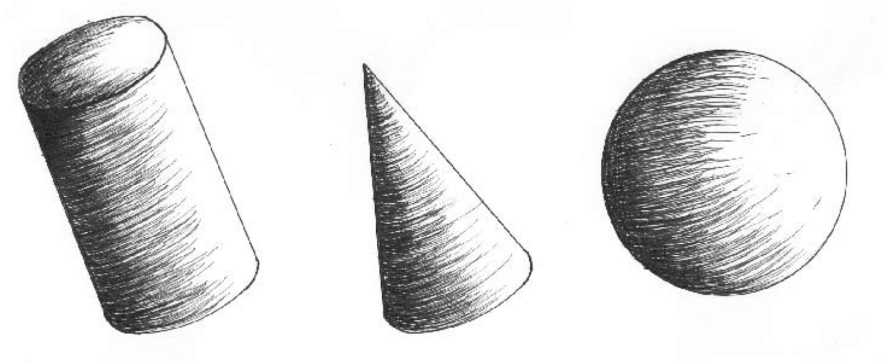


FIGURA 26

O que distingue os corpos redondos é que eles são conjuntos do espaço tridimensional limitados total ou parcialmente, por superfícies não planas. Na fase inicial da escolaridade, cremos que tal caracterização é suficiente para a exploração desse conteúdo. Por isso, julgamos desnecessária e até mesmo inadequadas algumas tentativas de propor a classificação dos sólidos em duas categorias: "os que rolam" e os que "não rolam". Ora, o fenômeno de rolagem é muito mais complicado e envolve propriedades físicas do objeto e da aceleração que imprimimos a ele. Um dado, por exemplo, em geral, rola muito bem se jogado sobre uma mesa, e uma lata cilíndrica não rola quando apoiada em sua base.

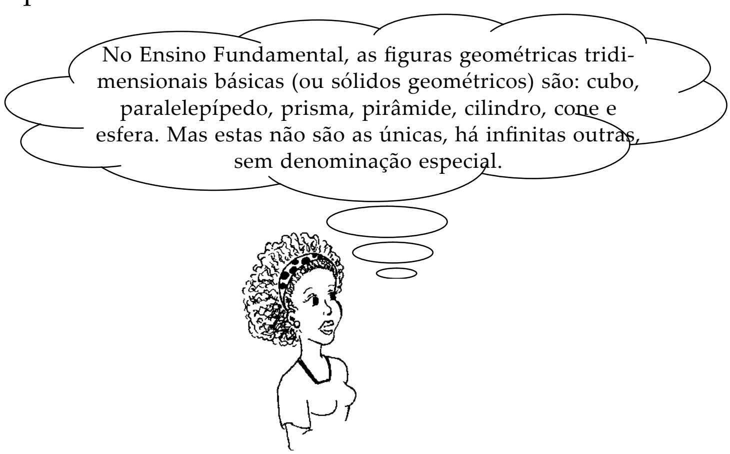


FIGURA 27

Algumas sugestões de atividades

A esta altura, o colega professor do Ensino Fundamental pode estar, legitimamente, preocupado com o acúmulo de classificações e de nomenclatura. E deve estar indagando: que atividades desenvolver com figuras geométricas além de classificá-las?

Em primeiro lugar, não devemos nos esquecer de que todo o trabalho de classificação e de aquisição da nomenclatura técnica das figuras geométricas precisa ser bem pausado e apoiado, de maneira permanente, em atividades de construção, manuseio, visualização, e de desenho.

O trabalho com poliedros deve permanecer o mais intuitivo possível. O importante é fazer com que, aos poucos, as crianças abstraiam, dos objetos concretos que manuseiam, as noções de vértice, face, aresta, entre outras. Além disso, as possibilidades de atividades interdisciplinares com o professor de Artes são inúmeras. O desenvolvimento da habilidade de montar modelos de poliedros com canudos de refrigerante é uma ótima ocasião para desenvolver a coordenação motora das crianças. Sugerimos o "vai e volta" entre figuras geométricas e os modelos concretos dessas figuras, com base em suas representações. Nisso, estão incluídas as atividades de planificação e montagem de figuras espaciais.

Além dessas, por exemplo, no caso dos polígonos convexos, vocês podem desenvolver, com os alunos, dois tipos de atividades bastante interessantes. Elas permitem uma boa conexão entre geometria, contagem e pensamento algébrico. No entanto, talvez sejam mais apropriadas apenas para aqueles alunos que já possuem habilidades de desenho mais desenvolvidas e mais familiaridade com a descoberta de regularidades.

Uma delas é a de solicitar a decomposição do polígono em triângulos. A decomposição deve ser feita com os vértices dos triângulos nos vértices do polígono. Em seguida, vocês podem explorar a regularidade do número desses triângulos em relação ao número de lados do polígono. Veja um exemplo de duas decomposições de um mesmo polígono:

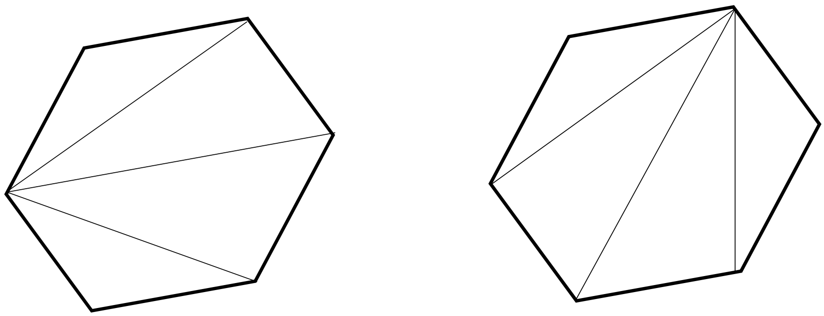


FIGURA 28

Em relação a essas decomposições, o professor deve propor atividades que sejam adequadas aos seus alunos. Entre as mais simples estaria a de pedir que eles cortassem as peças da decomposição e produzissem quebra-cabeças. Uma das mais instigantes, certamente adequada para os últimos anos da primeira fase do Ensino Fundamental, seria propiciar vários experimentos com decomposição de outros polígonos convexos, para a descoberta de que o número de triângulos que os decompõem é sempre igual ao número de lados menos 2.

Outra atividade é solicitar que as crianças construam as diagonais de um polígono convexo e tentem contá-las:

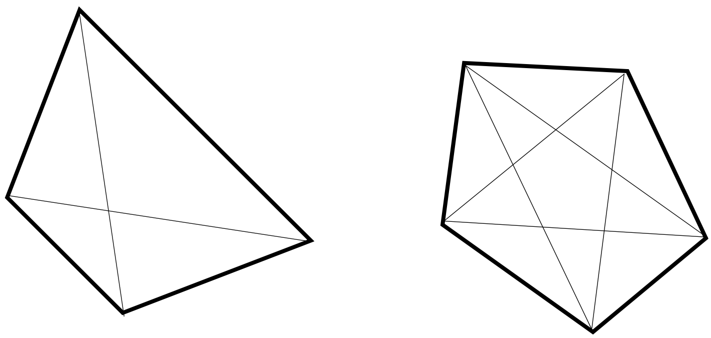


FIGURA 29

Procurar saber quantas diagonais possui um polígono convexo é uma das atividades interessantes de contagem organizada e que pode contribuir para que o aluno descubra a relação entre o número de lados e o número de diagonais[5].

[5] O número de diagonais é igual a $n(n-3)/2$, sendo n o número de lados.

Uma preocupação que devemos ter, ao longo de todo o trabalho pedagógico no campo da geometria, é a de não usarmos como exemplos apenas algumas figuras geométricas típicas. De fato, existem livros didáticos nos quais todos os triângulos são equiláteros ou isósceles; os trapézios são sempre isósceles ou retos; só são apresentados cilindros ou cones retos. Os estudos em didática indicam que uma criança que só encontre, em seu estudo, um elenco limitado de exemplos de figuras geométricas pode ter dificuldade de identificá-las, quando colocada diante de casos mais gerais.

Dificuldade análoga pode surgir se, em nossos desenhos, as figuras geométricas aparecem apenas nas chamadas **"posições padrão"**. A mais comum dessas posições é desenhar os polígonos com um dos lados paralelos à borda inferior da folha de papel ou do quadro da sala de aula:

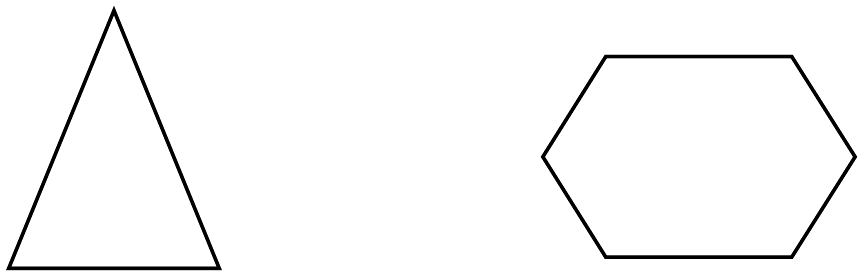


FIGURA 30

Os estudos mostram que muitas crianças têm dificuldade de considerar que as duas figuras abaixo são quadrados iguais, possivelmente porque só foram expostas, no ensino, ao quadrado desenhado na posição padrão, à esquerda.

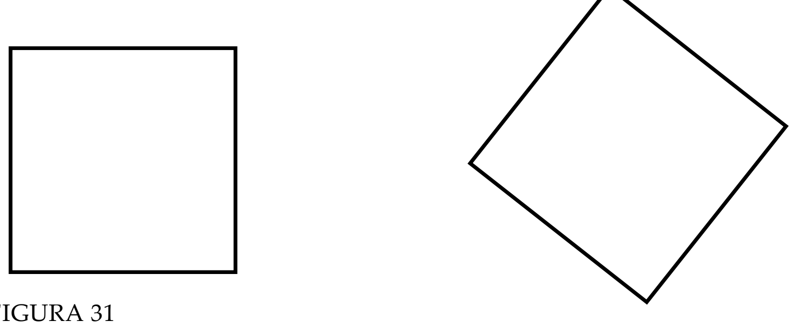


FIGURA 31

Professor, brinque com elas: mostre-lhes uma folha de papel quadrada, primeiro na posição prototípica, passe-a pelas costas e depois posicione-a na posição mostrada à direita na figura 31, e então pergunte se ela ainda é quadrada.

Outro exemplo é o da dificuldade de identificação de dois triângulos retângulos iguais diante dos desenhos seguintes:

FIGURA 32

No caso do triângulo, há muita insistência em só considerar **base** aquele lado que é paralelo à borda da folha de papel ou do quadro de giz. Ao contrário disso, sabemos que, em um triângulo qualquer de seus lados pode ser considerado uma base.

Considerações finais

Neste capítulo refletimos sobre alguns conteúdos de geometria que vêm sendo recomendados nos referenciais curriculares nacionais. Eles têm sido normalmente abordados nos primeiros anos do Ensino Fundamental e, também, nos livros didáticos destinados a essa fase da escolaridade.

Procuramos, em nossa abordagem, auxiliar o colega professor com sugestões de atividades que ele possa levar para sala de aula, mas, ao mesmo tempo, convidá-lo a considerar aspectos teóricos, não só na fundamentação dos conceitos matemáticos mas nas questões didáticas relativas a esses conceitos.

Buscamos, também, indicar algumas abordagens julgadas inadequadas, novamente aqui, não só do ponto de vista da Matemática como dos resultados de estudos em didática dos conteúdos matemáticos.

Esta tentativa será coroada de sucesso se puder despertar no colega professor o desejo de procurar saber mais a respeito desses temas.

Capítulo 8
Grandezas e medidas

*Paulo Figueiredo Lima**
*Paula Moreira Baltar Bellemain***

Há mais de dez anos, diversas recomendações curriculares para o Ensino Fundamental, e também os livros didáticos, têm valorizado o ensino das grandezas e medidas, consideradas como um dos quatro campos em que são agrupados os conteúdos matemáticos a serem estudados. Ao longo desse período, podemos observar alguma evolução no ensino deste campo e, sem dúvida, é dada maior atenção a ele nos estudos acadêmicos sobre questões de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos.

Mesmo assim, diferentes avaliações do ensino realizadas em nosso país mostram que o desempenho dos alunos é particularmente insatisfatório quando se trata de questões relativas a este campo. Tal fato, também observado em outros países, indica que ainda há um bom caminho a ser percorrido até podermos compreender melhor todos os aspectos associados ao estudo das grandezas e medidas no Ensino Fundamental.

Todos nós sabemos que o livro didático tem sido um auxiliar importante no ensino e, mais recentemente, já é possível constatar avanços na abordagem das grandezas e medidas propostas por ele. Observamos, por exemplo, que os conteúdos relativos a esse campo estão mais articulados a outros conteúdos matemáticos e, quando

* Ph. D. em Matemática, Professor do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco.
** Ph. D. em Didática das Disciplinas Científicas, Professora e pesquisadora no Centro de Educação da UFPE, na licenciatura em Matemática e no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica.

tratados especificamente, isto é feito em capítulos distribuídos ao longo do livro didático, e não relegados a uma parte isolada de cada livro, em geral no seu final.

Contudo, ainda há livros nos quais o estudo das grandezas e medidas aparece concentrado nos últimos capítulos da obra, e isso contribui, muitas vezes, para que esses conteúdos não sejam estudados durante o ano letivo. Além do mais, vários livros apresentam exclusivamente as unidades padronizadas de medição de grandezas. Outros dedicam excessiva importância à conversão de unidades de medida. Em alguns casos, nos primeiros anos do Ensino Fundamental, é dada atenção precoce às formulas de cálculo de perímetro e de área de figuras planas.

O foco do trabalho com grandezas e medidas nos anos iniciais da vida escolar deve ser o de construir os alicerces para o aprofundamento desse conceito na segunda etapa do Ensino Fundamental, permitindo que as concepções das crianças venham à tona e possam ser reforçadas ou modificadas. As unidades de área do Sistema Internacional de Unidades (SI) mais familiares, bem como outras unidades convencionais, podem ser introduzidas, mas o estudo sistemático de tabelas de conversão é desaconselhado nessa etapa.

Por que trabalhar grandezas e medidas no Ensino Fundamental?

A inclusão dos conteúdos desse campo nos anos iniciais do Ensino Fundamental justifica-se basicamente por três razões: os seus usos sociais, com suas utilizações nas técnicas e nas ciências; as conexões com outras disciplinas escolares; e as articulações com outros conteúdos da Matemática.

A presença nas práticas sociais

As grandezas e medidas estão muito presentes em nosso cotidiano, mas em geral não nos damos conta disso. Basta um momento de reflexão para nos mostrar que, mesmo antes de chegar à escola, a criança participa de situações do dia a dia nas quais ela própria, seus colegas ou seus familiares lidam com grandezas e medidas. Todas as falas seguintes, por exemplo, envolvem uma comparação, uma medição ou uma estimativa de medida relativa a alguma grandeza.

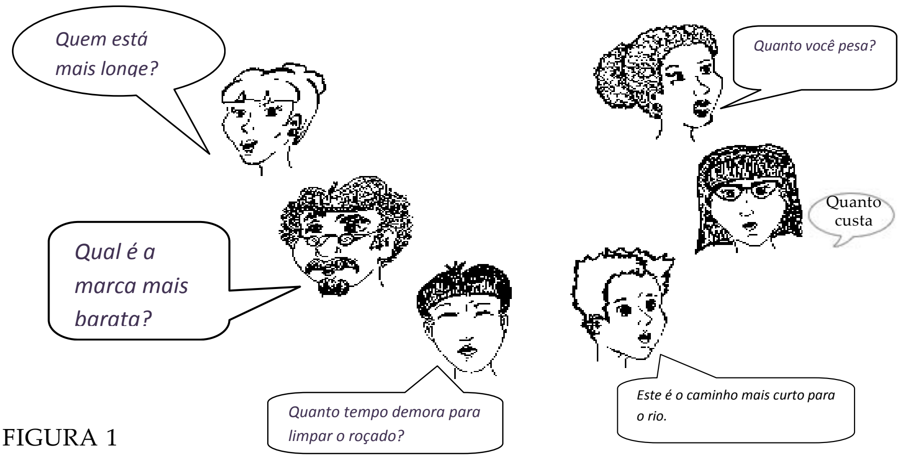


FIGURA 1

Em alguns jogos e brincadeiras as crianças recorrem a habilidades que envolvem grandezas: nas brincadeiras de faz de conta e nas simulações do "mundo dos adultos" (brincar de venda, por exemplo); para montar uma pipa; nos jogos de bolinha de gude, na demarcação do campo de futebol; na confecção de roupas para as bonecas; nas brincadeiras com cordões, entre outras.

Em geral, em nossas compras e vendas, lidamos com o valor dos produtos e o dinheiro (valor monetário) e, dependendo do produto comercializado, utilizamos conhecimentos sobre massa ("peso"), capacidade, comprimento, área, entre outras. A dona de casa quando lê uma receita ou decide colocá-la em prática também mobiliza noções do campo das grandezas e medidas, expressas em questões como as seguintes:

A quantidade de farinha de trigo neste pote é suficiente para fazer o bolo de chocolate?
Quantos gramas de margarina são necessários para fazer os biscoitinhos?
Como adaptar uma receita prevista para quatro pessoas, se temos seis convidados?
Quanto tempo devemos deixar o bolo no forno?

Em nosso dia a dia, muitas vezes, não há necessidade de maior exatidão na medida de uma grandeza, apenas uma estimativa dessa medida é suficiente. Por exemplo, em geral, basta saber aproximadamente quantos litros de leite nossa família consome em uma semana.

Em algumas situações, porém, uma medida mais precisa é fundamental: ao dar remédio a uma criança com febre, é preciso administrar a dose adequada ao seu "peso" e idade, pois uma quantidade muito maior que a indicada pode provocar intoxicação e uma quantidade inferior à necessária não surtirá o efeito desejado.

Os exemplos ilustram a relevância social das grandezas e medidas e mostram que conhecimentos limitados nesse campo da Matemática restringem a capacidade das pessoas de exercerem plenamente sua cidadania.

Além dos usos no cotidiano, os conhecimentos relativos às grandezas e medidas são necessários nas atividades técnicas de todas as profissões: culinária; agricultura e pecuária; marcenaria; costura; comércio; engenharia; medicina; arquitetura; esportes etc. E essa é uma das razões para a valorização de seu ensino e aprendizagem.

Conexões com outras disciplinas

Uma outra razão é o indiscutível papel que os conceitos de grandezas e medidas desempenham nas Ciências Naturais e Humanas, o que possibilita um trabalho rico em conexões com outras disciplinas escolares. Por exemplo, o tempo é um tema extremamente rico, que permite conectar História e Matemática. No estudo dos animais, é possível explorar conhecimentos sobre massa, comprimento, duração da gestação de várias espécies e, assim, articular Matemática e Ciências. O estudo de temas como meio ambiente, por exemplo, também é enriquecido se as crianças dispõem de conhecimentos do campo das grandezas e medidas: construir uma tabela com o tempo de decomposição de materiais como papel, plástico ou metais, estimar a quantidade de água gasta pela escola por mês, entre outras.

Por tudo isso, o professor pode encontrar nas grandezas e medidas um campo fértil de aplicações da Matemática às práticas sociais e isso o ajudará a responder à inquietação legítima de nossos alunos quando nos questionam sobre o porquê desses conhecimentos matemáticos serem ensinados. Mas cabe à escola e ao docente resgatar e valorizar os conhecimentos que a criança traz de sua vivência extraescolar, enriquecê-los com outras experiências e conduzir o processo de sistematização progressiva desses conhecimentos.

Articulações internas com outros campos da Matemática

Uma terceira razão da inclusão do campo das grandezas e medidas no ensino são as articulações com outros campos da Matemática. Por exemplo, a origem dos números decimais e das frações é inseparável do problema da medida. Se tentarmos medir diversos comprimentos usando uma dada unidade de medida (podemos usar um palito de picolé para medir a largura, o comprimento e a altura de uma mesa) vamos logo perceber que os números naturais não são suficientes para dar conta das situações de medida (temos 10 palitos e mais um pouquinho, num caso; quase 8 palitos, noutro caso etc.). Assim, as medições geram a necessidade de expressarmos quantidades cujas medidas não são números naturais.

Um pouco de teoria

O desempenho insatisfatório dos alunos nas questões de grandezas e medidas, observado em diferentes países, nos leva a pensar que algumas dificuldades no ensino e na aprendizagem desse campo não dizem respeito apenas a fatores ligados ao contexto educacional, mas também à complexidade dos conceitos envolvidos. Nos parágrafos seguintes, esboçamos uma reflexão sobre alguns desses conceitos, começando pelas grandezas geométricas, que ocupam um lugar privilegiado no Ensino Fundamental.

Sabemos, por exemplo, que no estudo da geometria e das grandezas geométricas é preciso valorizar bastante as experiências de visualização e de manipulação de objetos do mundo físico como as atividades que envolvem desenhos ou imagens. Por meio dessas experiências e atividades, os alunos podem descobrir e compreender melhor as propriedades dos objetos físicos e as relações que existem entre eles.

No entanto, as atividades de visualização e manipulação não são suficientes. Além delas, é imprescindível que, de forma simultânea e progressiva, os conceitos matemáticos associados aos objetos físicos e aos desenhos ou às imagens (às representações gráficas) sejam ensinados e aprendidos. Tais conceitos matemáticos, e as relações entre eles, nos fornecem modelos abstratos de objetos do mundo físico ou de representações gráficas de objetos físicos. Esses modelos – que são objetos matemáticos – fazem parte do conhecimento matemático sistematizado que deve ser adquirido ao longo das várias fases da escolaridade.

Assim, podemos dizer que temos três tipos de objetos:

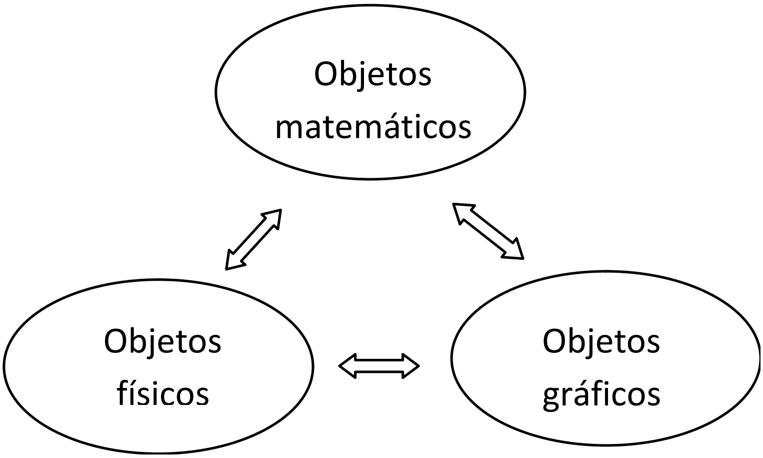


FIGURA 2

Grandezas geométricas

O estudo das grandezas geométricas envolve aspectos teóricos que vale a pena aprofundar um pouco mais aqui. É claro que tais reflexões não devem ser feitas diretamente com as crianças. Seu objetivo é auxiliar o professor a compreender melhor os conceitos envolvidos e oferecer-lhe elementos para elaborar, em sala de aula, atividades que levem em conta essas questões.

De início, recorremos ao esquema apresentado na Figura 2 para observar que, no estudo da geometria e das grandezas geométricas entram em cena três componentes, os objetos do mundo físico, as representações gráficas e as figuras geométricas.

> Podemos distinguir três tipos de objetos – físicos, gráficos e matemáticos – mas isto não significa que eles sejam dissociados uns dos outros. Ao contrário, são estreitamente inter-relacionados. Cada um deles pode ser utilizado para representar os outros dois, no contexto da sala de aula.

Tomemos como exemplo a grandeza comprimento e vamos considerar uma vareta de madeira. A este objeto físico podemos associar seu desenho (ou sua imagem) e, ainda, o conceito matemático de 'segmento de reta AB'.

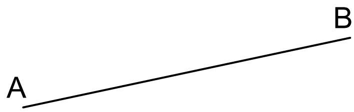


FIGURA 3

No entanto, para nossas considerações sobre grandezas, convém colocar em segundo plano a distinção entre os três componentes citados e, para simplificar, denominar qualquer um deles de **objeto geométrico**. A esse objeto geométrico (no exemplo, o desenho de uma vareta, ou segmento de reta AB) associamos uma grandeza, seu comprimento, que é um atributo desse objeto, intuitivamente entendido como o **tanto de espaço linear** que o objeto geométrico possui. O processo de medição de comprimento em uma determinada unidade, que será detalhado mais adiante, permite-nos atribuir ao comprimento do objeto geométrico (vareta ou segmento) um número, que é denominado **medida** do comprimento na unidade escolhida.

Desta forma, os conceitos em jogo podem ser organizados em três universos ou domínios: o do objeto geométrico, o da grandeza e o da medida da grandeza:

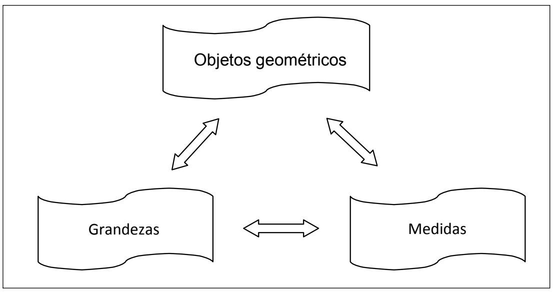


FIGURA 4

Convém observar que as componentes acima apontadas são distintas. De fato, diferentes segmentos de reta podem ter o mesmo comprimento. Por exemplo, as distintas arestas de um cubo têm, todas, o mesmo comprimento e diferentes varetas podem ter o mesmo comprimento. Além disso, se medirmos a mesma vareta com diferentes unidades obteremos diferentes medidas.

Apesar de distintas, as três componentes são estreitamente ligadas entre si e o desafio do ensino desses conceitos é precisamente, distinguir e articular tais componentes, de forma simultânea.

Se desejarmos representar os conceitos acima referidos, podemos tomar o exemplo da vareta representada pelo segmento de reta AB e escolher o centímetro (cm) para unidade de comprimento. A medida da vareta nessa unidade pode ser o número 50 e, neste caso, o seu comprimento será indicado pelo **símbolo composto 50cm**. Assim, o comprimento, como vai ocorrer com as demais grandezas, pode ser representado pelo par constituído por um número (a medida) e pelo símbolo da unidade adotada. Se escolhermos o metro (m) para unidade, a medida de comprimento mudará de 50 para 0,5. Vemos, assim, que mudam as unidades e as medidas, mas o comprimento da vareta não se altera.

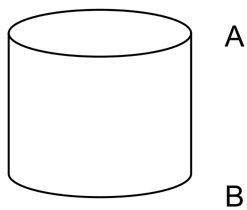


FIGURA 6

A distinção entre objetos e grandezas justifica-se, também, por outra razão. É que a um mesmo objeto é possível associar várias grandezas. Tomemos o exemplo de uma lata de leite em pó, cujo modelo matemático seja um cilindro.

A este objeto podemos associar a sua capacidade, que é o **volume** de seu interior. Mas, é possível, igualmente, considerar sua altura, que é o **comprimento** de um segmento AB, tomado entre as bases do objeto e perpendicular a ambas. Outros comprimentos importantes são os diâmetros e os perímetros das bases. Também podemos levar em conta a **área** da superfície lateral da lata ou de suas bases. E não é tudo. Em muitos casos, estamos interessados na **massa** ("peso") da lata cheia do produto nela contido (chamada "peso bruto"), ou na **massa** ("peso") apenas do produto (chamada "peso líquido").

O esquema conceitual no qual distinguimos os objetos, as grandezas e as medidas, apresentado anteriormente, pode ajudar na compreensão e no ensino dos fatos ligados a várias grandezas, em particular, comprimento, área e volume. No entanto, para muitas outras, também importantes no Ensino Fundamental, é necessário ampliar o domínio dos objetos, que poderia passar a incluir fenômenos físicos ou sociais. Tal ampliação faz-se necessária mesmo nos anos iniciais do Ensino Fundamental quando lidamos, por exemplo, com noções como tempo, grandeza que não é associada a objetos, como o comprimento, massa etc. Nos anos posteriores da escolaridade surgem grandezas que são associadas a inúmeros fenômenos: velocidade, aceleração, temperatura, energia, densidade populacional, intensidade do som, e muitas outras.

Comparar grandezas

Nesta fase da escolaridade, as grandezas mais presentes no cotidiano são construídas pelas crianças com apoio em experiências concretas de comparação e de medição.

É possível fazermos comparações de grandezas sem realizar uma medição. Nessas comparações procuramos apenas estabelecer uma relação – maior, menor, igual – entre as grandezas. Atividades deste tipo são muito significativas na aprendizagem inicial desses conceitos. Uma das justificativas é que, muitas vezes, por exemplo, precisamos saber apenas se um objeto é mais pesado do que outro, sem que seja necessário saber o quanto é mais pesado.

Além disso, o modo próprio para comparação de cada grandeza contribui para a necessária diferenciação entre elas. Por exemplo, comparamos as alturas de duas garrafas de forma diferente da que comparamos os seus volumes. Para decidir qual de duas varetas é mais comprida, alinhamos duas de suas extremidades e observamos o que acontece com as outras duas extremidades. Para saber qual a vareta mais pesada, colocamos as duas em uma balança de dois pratos e verificamos se estes ficam equilibrados ou não.

Pela sua importância, essas atividades deveriam estar mais presentes no ensino escolar, e particularmente no livro didático. Nesse sentido, é possível desenvolver inúmeras atividades de comparação de grandezas, sem medição, como vemos no quadro a seguir. Elas podem ser trabalhadas com materiais concretos de vários tipos ou serem propostas com base em textos e ilustrações, como nos livros didáticos.

Grandeza	**Objetos**	**Procedimento**
Comprimento	Duas varetas	Emparelhar as varetas com uma de suas extremidades apoiadas em uma mesa e comparar as outras duas extremidades.
Comprimento	Duas curvas desenhadas numa folha de papel	Utilizar dois cordões e superpor cada um deles a uma das curvas: comparar os comprimentos dos cordões esticados.
Capacidade	Duas garrafas	Encher completamente uma das garrafas com um líquido e despejar o conteúdo na outra. Verificar se sobra ou falta líquido para o preenchimento da segunda garrafa.
Área	Duas figuras planas recortadas em papel	Superpor uma figura sobre a outra. Se ela couber no interior da outra, então sua área é a menor das duas. Se as figuras coincidirem por superposição, elas possuem a mesma área.
Área	Duas figuras planas recortadas em papel, designadas I e II	Cortar a figura I em partes, compor uma figura III, e comparar esta última com II, por superposição.
Massa	Dois pedaços de algum material sólido	Utilizar uma balança de dois pratos. Os pratos da balança ficarão equilibrados, se os objetos tiverem a mesma massa. Caso um dos objetos tenha massa maior, o seu prato ficará mais baixo.
Tempo	Realização de uma tarefa qualquer	Se dois alunos começam uma tarefa no mesmo momento, quem terminar primeiro gastou um tempo menor do que o colega.

As atividades acima são apenas exemplos. Muitas outras podem ser elaboradas e, certamente, desempenharão um papel relevante na aquisição dos conceitos e habilidades no campo das grandezas e medidas. Contudo, é necessário que tenhamos cautela com algumas inadequações que podem prejudicar a aprendizagem.

Nos primeiros anos de escolaridade, são trabalhadas atividades em que se solicita da criança fazer comparações entre objetos materiais ou entre seres vivos com base em perguntas: "*Qual é o cachorro grande? Qual a bola pequena? Qual a casa que está longe?*".

Tais perguntas, mesmo quando só há dois objetos em jogo, podem gerar ambiguidades. O que é grande em comparação com um determinado objeto pode ser pequeno relativamente a outro. O que é longe com respeito a um ponto de referência pode ser perto com relação a outro ponto. Seria desejável que o colega professor aproveitasse esse tipo de situação para refletir com o aluno que ser grande ou ser pequeno depende de uma referência, como discutido no capítulo 5 deste livro, que trata dos livros paradidáticos.

Além disso, é recomendável evitar atividades em que é solicitada a comparação de comprimentos ou distâncias em ilustrações desenhadas em perspectiva. Por exemplo:

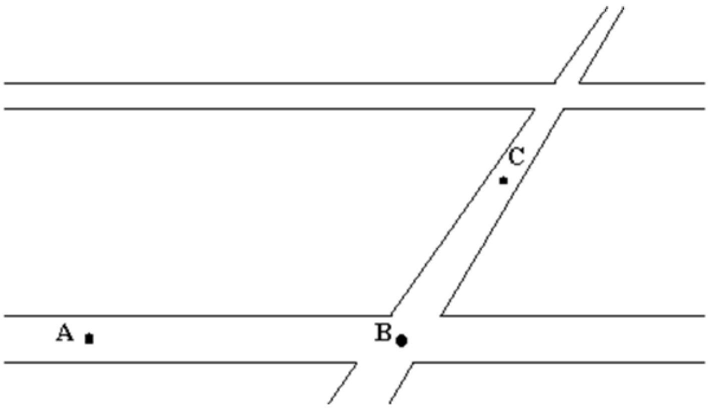


FIGURA 7

Na ilustração acima, que representa as ruas de uma cidade desenhadas em perspectiva, não temos elementos para saber qual dos pontos, **A** ou **C**, está mais próximo de **B**. Sem informações adicionais não é possível afirmar nada e o ponto **C** pode, na realidade, estar mais longe de **B** do que o ponto **A**. E mais, inadequações deste tipo contribuem para prejudicar, na criança, o desenvolvimento da habilidade de extrair informações de representações gráficas.

Medir grandezas

O tipo de comparação entre grandezas descrito na seção anterior é insuficiente para atender a todas as exigências de nossas atividades. Precisamos, quase sempre, medir grandezas.

Medir uma grandeza é atribuir um número a esta grandeza. A medição de uma grandeza pode ser realizada em um objeto, em um fenômeno, ou ser efetuada em representações gráficas de objetos. Em todos esses casos, podemos dizer que realizamos uma medição experimental.

A medição de grandezas é um processo complexo, que envolve escolha de uma unidade de medida e emprego de procedimentos apropriados, muitos deles apoiados em **instrumentos** – réguas, relógios, balanças, recipientes graduados, entre muitos outros. Nesse processo, atribui-se um número a uma grandeza, que é a medida da grandeza na unidade escolhida.

A história desses processos de medição tem estreita ligação com a evolução tecnológica e científica das culturas humanas. Em particular, a gradual padronização das unidades de medidas levou a humanidade ao estabelecimento do sistema métrico decimal e, posteriormente, do Sistema Internacional de Unidades, que hoje é amplamente utilizado.

No ensino, é importante que se dê oportunidade ao aluno para efetuar medições de forma intuitiva, com o emprego de unidades não padronizadas e próximas de seu dia a dia. Essas atividades podem contribuir para a compreensão do caráter arbitrário da unidade e para desenvolver a habilidade de adequar a unidade à grandeza a ser medida.

Por meio da medição, a comparação de grandezas recai em uma comparação de números. Por exemplo, para comparar os comprimentos de duas varetas, podemos medi-las e, se verificarmos que uma tem 15cm e a outra 12cm, saberemos que a primeira é mais comprida do que a segunda. Para que essa comparação possa ser realizada, no entanto, é indispensável que usemos a mesma unidade para medir as duas varetas.

A medição é, assim, um meio eficiente para a comparação de grandezas. Mas, observamos algumas inadequações em atividades de comparação por meio de medição, propostas no ensino. Elas ocorrem em enunciados vagos de questões, nos quais a resposta fornecida é restrita a uma única interpretação de seu enunciado. Vejamos o seguinte exemplo:

MARQUE UM X EMBAIXO DO RETÂNGULO MAIOR

FIGURA 8

Como vemos, não é dita qual a grandeza a ser comparada nos dois retângulos. Por isso, mais de uma resposta correta é possível e, se é fornecida apenas uma única resposta para a atividade, surge um erro didático a ser evitado. De fato, se escolhemos comparar áreas, o retângulo da esquerda é maior do que o da direita. Se decidimos comparar comprimentos relacionados às figuras, por exemplo, os seus perímetros, a situação se inverte: o da esquerda é menor. E não é só isso. Mesmo se escolhemos a grandeza comprimento para comparação e não informamos quais os comprimentos a serem observados, uma criança pode comparar, ao invés dos perímetros, os comprimentos dos lados horizontais das figuras e concluir que a da esquerda é maior. Outra criança pode comparar os comprimentos dos lados verticais e decidir que a figura da esquerda é a menor. Uma terceira pode escolher comparar os comprimentos das diagonais dos retângulos e concluir que a figura da esquerda é a menor.

O uso do termo ”tamanho”, em atividades de comparação de grandezas, com enunciados do tipo: “Qual é o retângulo de tamanho maior?” sem especificar a grandeza em jogo, recai em uma inadequação, comentada anteriormente no texto.

Um aspecto fundamental na obtenção de qualquer medida experimental é a existência dos erros de medição. O erro de medição é a diferença entre o resultado dessa medição e o valor verdadeiro da grandeza a ser medida. Este valor verdadeiro, por sua vez, não pode ser obtido por medições experimentais e é um valor teórico adotado com base em modelos físicos ou matemáticos. Pode ser, também, um valor estabelecido teoricamente pela aplicação de métodos probabilísticos a um conjunto de resultados de repetidas medições, realizadas nas mesmas condições com respeito ao instrumento empregado, ao experimentador e à grandeza em questão. Para exemplificar, tomemos o modelo, na geometria euclidiana, constituído por um triângulo com um ângulo reto, ou seja, um triângulo retângulo. Se supusermos que os catetos desse triângulo medem 3cm e 4cm, respectivamente, sua hipotenusa medirá 5cm, pelo Teorema de Pitágoras. No entanto, tais comprimentos são teóricos, só valem no modelo abstrato. Se construirmos esse triângulo, seja desenhando-o em um papel, seja confeccionando-o com algum material, e medirmos seus lados, os valores obtidos serão sempre afetados por erros, provenientes dos instrumentos utilizados, do experimentador e das imperfeições do modelo concreto do triângulo retângulo construído.

Estimar medidas

Em muitas de nossas atividades diárias, somos solicitados a empregar a habilidade de estimar medidas:

FIGURA 9

Para responder perguntas desse tipo, às vezes não podemos ou não desejamos utilizar instrumentos de medida ou recorrer a informações já existentes sobre uma medida desejada. Realizamos, então, "comparações mentais" ou "medições mentais" com pouca exatidão, mas que são suficientes para os fins desejados.

Na escola, várias estratégias podem ser usadas para desenvolver a habilidade de estimar medidas, uma das quais é associar unidades padronizadas a objetos ou fenômenos familiares às crianças de modo que as "medições mentais" possam ser realizadas.

- Quantos palmos tem o cabo desta vassoura?
- Quanto litros cabem neste balde?
- Uma folha de jornal tem mais de um metro quadrado?

A estimativa de medida tem o mérito de aproximar o aluno das aplicações da Matemática. Além disso, contribui para que nos familiarizemos com modelos concretos das unidades padronizadas, o que pode nos ajudar na escolha da unidade mais adequada a uma determinada medição. Por exemplo, colabora para decidirmos se, para medir um determinado comprimento ou distância, devemos recorrer a metros ou a centímetros. Ou se, para medir a área da sala de aula, seria mais adequado usar o metro quadrado ou o centímetro quadrado.

Neste sentido, uma falha que ocorre em alguns livros didáticos e que deve ser evitada é apresentar desenhos de diferentes réguas, graduadas em centímetros, muito próximos umas das outras, mas sem guardar a mesma escala nas duas réguas. Na fase inicial de aprendizagem, isto pode dificultar a compreensão da unidade centímetro, que é apresentado com comprimentos diferentes.

Propor atividades desse tipo ajuda a criar imagens mentais sobre as unidades e a desenvolver a habilidade de estimar medidas.

No ensino usual, em particular nos livros didáticos, são raras as atividades que procuram desenvolver, no aluno, a mencionada habilidade. Além disso, algumas das que são propostas como atividades de estimativa não contribuem para o desenvolvimento de tal habilidade. Por exemplo, se pedirmos para a criança comparar os comprimentos de dois caminhos desenhados em uma malha quadriculada, ela pode facilmente efetuar uma contagem do número de lados dos quadradinhos e obter as medidas dos comprimentos dos caminhos e efetuar a comparação. A criança não precisa fazer uma estimativa, baseada em informações visuais. Assim, propor situações em que a contagem de objetos ou de unidades resolve o problema facilmente, não favorece a aprendizagem da habilidade de estimar medidas.

Formar sequências e ordenar

Consideremos uma coleção de vários objetos. Comparar, dois a dois, esses objetos segundo uma grandeza a eles associada – tanto diretamente como por meio de medição ou de estimativa – permite estabelecer o que se chama uma **relação de ordem** nessa coleção. Em seguida, em uma coleção em que se estabelece uma comparação dos objetos dois a dois, podemos construir o que se chama uma ordenação da coleção. Para isso, vamos precisar da noção de sequência de objetos de uma coleção.

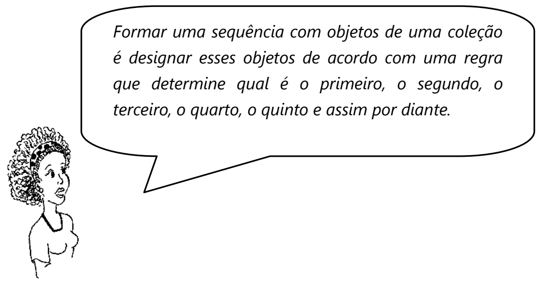


FIGURA 10

Quando escolhemos uma grandeza a considerar nos objetos de uma coleção e formamos uma sequência com eles de maneira que o primeiro elemento é o menor de todos, o segundo é o menor dos restantes, o terceiro é o menor dos que ainda restam e assim por diante, dizemos que formamos uma **sequência** crescente desses objetos segundo a grandeza escolhida. Em outras palavras, fizemos uma **ordenação** desses objetos segundo a grandeza em foco. Na passagem das comparações dois a dois para a comparação com mais de dois objetos, utilizamos a propriedade de transitividade da relação de ordem das grandezas, que pode ser verificada experimentalmente pela criança:

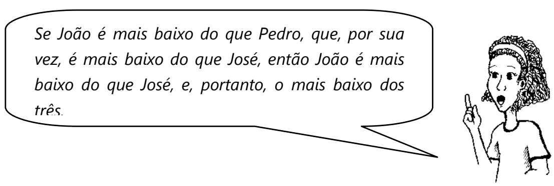


FIGURA 11

Tomemos, como exemplo, uma coleção de varetas e formemos uma sequência com elas, em que a primeira seja a mais curta de todas e a última a mais comprida, da esquerda para a direita, como mostra o desenho da figura 12.

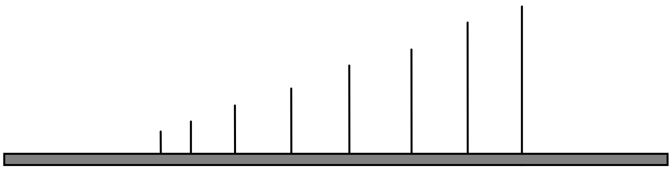


FIGURA 12

Deste modo, o que formamos acima foi uma sequência constituída pelas varetas que, além disso, é ordenada de modo crescente segundo o comprimento. De maneira análoga, podemos ordenar as varetas de forma decrescente, conforme o comprimento:

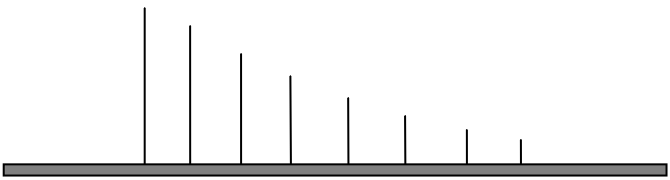


FIGURA 13

No entanto, estas não são as únicas maneiras de formarmos uma sequência com as varetas. Podemos formar muitas outras sequências com as mesmas varetas, sem que seja observado o critério de ordem relativamente ao comprimento. Por exemplo:

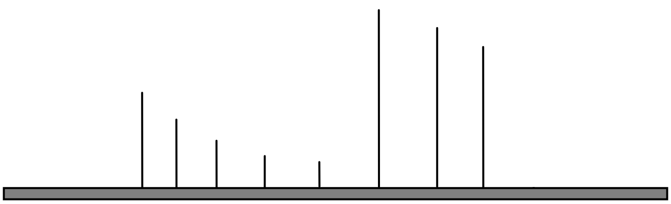


FIGURA 14

Nesta sequência, como se vê, as mesmas varetas não estão ordenadas de forma crescente, nem de forma decrescente.

A respeito das sequências, é frequente que, em atividades propostas pelos livros didáticos ou pelo professor, sejam oferecidos os primeiros termos de uma sequência e pedido para o aluno *"descobrir a regra"* (ou *"descobrir o padrão"*). Em seguida, ele é solicitado a fornecer mais alguns termos da sequência seguindo essa regra. Estas são atividades interessantes do ponto de vista da formação matemática, mas é preciso cautela para não se esperar uma resposta única do aluno. De fato, devemos considerar a possibilidade de ser encontrada mais de uma maneira de prosseguir a sequência, a partir de seus primeiros termos.

Comprimento

Já nos referimos a esta grandeza geométrica básica, o comprimento, associando-o a objetos geométricos retilíneos. Mas é possível ampliar o seu estudo em várias direções, algumas das quais são mencionadas nesta seção.

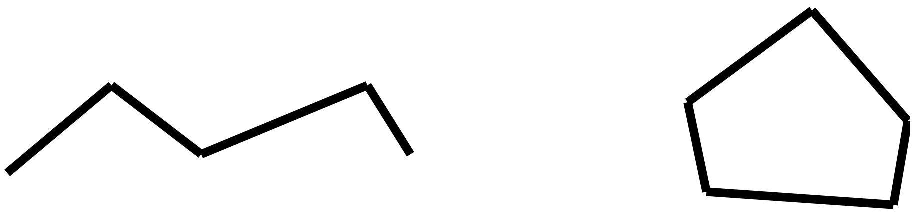


FIGURA 15

Uma primeira ampliação seria tratar do caso do comprimento de linhas poligonais, chamadas também de "linhas quebradas":

Neste caso, é bastante natural tomar o comprimento total com a soma dos comprimentos de cada trecho retilíneo. Se tivermos uma linha poligonal em uma malha quadrada, conforme o desenho a seguir, a soma dos comprimentos é obtida com facilidade por meio da soma de suas medidas. Tomando-se a unidade definida pelo lado do quadrado básico como unidade de comprimento, indicada por **u**, as duas poligonais da Figura 16 são bem distintas, mas têm o mesmo comprimento: 16**u**.

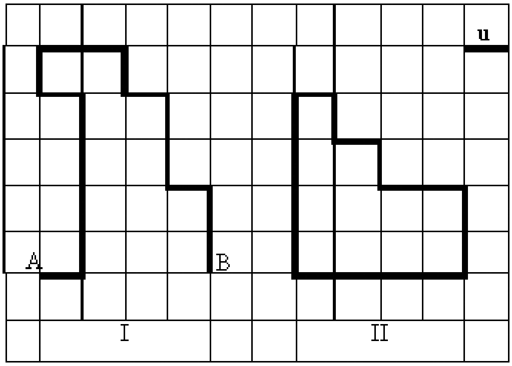


FIGURA 16

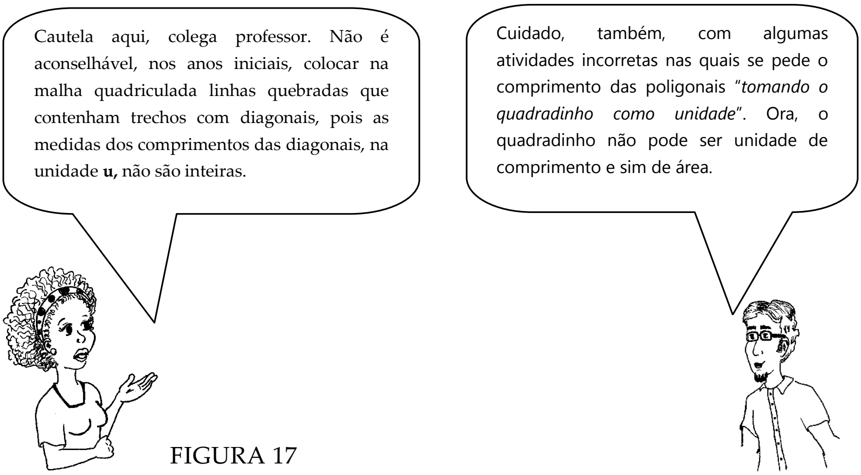


FIGURA 17

Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, é possível fazer uma abordagem informal do comprimento de objetos geométricos lineares de tipo mais geral. Tomemos, por exemplo, um pedaço de arame flexível encurvado. A este objeto físico associamos seu desenho (ou sua imagem) e, ainda, o conceito matemático que podemos denominar curva AB. Os pontos A e B são chamados suas extremidades (Figura 18).

FIGURA 18

No estudo da grandeza comprimento, encontramos muitas atividades que tratam da distância entre dois pontos. Isto se justifica porque a distância entre pontos é o comprimento de uma curva (ou um caminho) que liga esses pontos. Um exemplo importante ocorre quando o caminho entre dois pontos, A e B, é o segmento de reta AB. Mas o caminho pode ser uma curva de outro tipo, como a da Figura 18. Em qualquer caso, a distância é um comprimento e como tal, é medida em unidades desta grandeza. No exemplo I, Figura 16, como vimos, a distância de A para B segundo o caminho indicado é de 16 u.

O tratamento matemático do conceito de comprimento de uma curva do tipo AB, da Figura 18, é mais difícil e deve ser deixado para etapas bastante posteriores da escolaridade. Mas, se nos restringirmos a realizar atividades com objetos físicos desse tipo ou com desenhos desses objetos – por nós chamados de curvas – os seus comprimentos podem ser considerados os comprimentos dos segmentos de reta que se obtém retificando essas curvas. Uma estratégia que permite isso é empregar cordões ou fitas de papel para decalcar a curva e depois efetuar a retificação. Desta forma, podemos comparar, medir ou estimar comprimentos de curvas.

Quando em uma curva as extremidades coincidem temos o que se chama uma curva fechada:

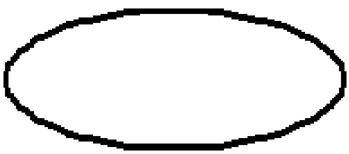


FIGURA 19

O comprimento de uma curva fechada é o que chamamos o seu **perímetro**. As curvas fechadas que estudamos na escola delimitam uma região plana que é o seu interior. Em geral, dizemos que tal curva é o **contorno** da região. Assim, podemos também dizer que o perímetro é o comprimento do contorno de uma região. Mas é preciso cautela: o perímetro não é o próprio contorno, mas o seu comprimento. De fato, diferentes contornos podem ter o mesmo comprimento. Na linguagem usual, no entanto, tal distinção não é feita e emprega-se o termo ‘perímetro’ para designar o contorno de uma região e até mesmo uma região. É o que se observa, por exemplo, nas placas rodoviárias, em que podemos ler: *Reduza a velocidade. Perímetro urbano*.

Quando o contorno de uma região é poligonal, o seu perímetro pode ser obtido pela soma dos comprimentos de seus lados. Desta maneira, no exemplo II (Figura 16), o perímetro da curva é 16 u. Mas é bom lembrar que o conceito de perímetro também vale para contornos que não têm lados, como no exemplo da Figura 19.

Área e perímetro

O trabalho com área no Ensino Fundamental foi marcado durante um longo período por uma ênfase exagerada nas fórmulas de áreas das figuras geométricas usuais (retângulo, paralelogramo, triângulo etc.), e também nas unidades e conversões entre unidades de área. A apresentação de fórmulas e sua aplicação em uma série exaustiva de problemas têm se mostrado ineficaz e geradora de entraves futuros, como a confusão entre perímetro e área, omissão ou o uso inadequado de unidades de área (por exemplo, expressar a área de uma figura em metros, que são unidades de comprimento).

As fórmulas têm um papel importante na resolução de problemas matemáticos, mas, para que cumpram esse papel a contento, é preciso que os alunos sejam capazes de utilizá-las com compreensão. Nesse caso, a compreensão das fórmulas exige que possamos entender a relação complexa existente entre comprimento e área. Além disso, há muitos problemas que envolvem a área de figuras geométricas planas e nos quais não é necessário utilizar fórmulas. Por isso, não é prioridade, na primeira etapa do Ensino Fundamental abordar as fórmulas de área.

A palavra área é usada na vida cotidiana com múltiplos sentidos, em expressões como: vende-se esta área; área de serviço; grande área de um campo de futebol etc. Alguns desses usos ajudam a dar sentido à área na matemática escolar, outros podem gerar entraves. Por exemplo, quando alguém vê em uma placa “vende-se esta área” o que está à venda é um determinado terreno demarcado, com todas as suas características fixadas.

O sentido que a palavra área vai tomar na aula de Matemática entra em conflito com esse uso da palavra. Vamos supor que temos um terreno de 15 metros de frente por 20 metros de fundo. Outro terreno com as mesmas dimensões, localizado no bairro vizinho, tem a mesma área (no sentido matemático), mas não é a mesma área (no sentido da expressão vende-se esta área). Mais ainda, um terreno com 10 metros de frente e 30 metros de fundo, mesmo não tendo as mesmas dimensões, terá a mesma área que o primeiro. Alguns alunos vivenciam um conflito entre os sentidos que as palavras têm na vida cotidiana e aqueles que elas possuem nas aulas de Matemática. Por isso, você colega professor, deve ter muita clareza sobre os sentidos matemáticos e sobre a possibilidade de os alunos confundi-los com os outros sentidos.

Como trabalhar essas ideias na sala de aula? Algumas atividades podem ajudar a trazer à tona o sentido que os alunos espontaneamente atribuem à palavra área. Como exemplo, sugerimos comparar as áreas de duas figuras idênticas construídas em cartolina, em posições diferentes. O aluno que pensa em área como região dirá que as figuras possuem áreas diferentes e caberá ao professor explicar que em Matemática consideramos que figuras idênticas têm a mesma área, quaisquer que sejam suas posições.

Mas será que figuras de mesma área têm que ser idênticas? Vamos novamente discutir essa questão a partir de exemplos. Um dos recursos incorporados aos livros didáticos e que é útil para abordar a possibilidade de figuras diferentes terem mesma área é o tangram. Duas figuras geométricas montadas com as sete peças do tangram, por mais diferentes que sejam, têm, todas, a mesma área. Outro aspecto importante que pode ser explorado com o tangram é permitir que os alunos compreendam que duas figuras geométricas podem ter a mesma área e, no entanto, possuírem perímetros diferentes, o que contribui para a distinção entre essas duas grandezas.

As atividades discutidas até aqui, nas quais os aspectos numéricos são secundários, porque não são feitas medições, contribuem para distinguir as figuras geométricas das grandezas que se podem associar a elas:
- a uma figura podem-se associar diferentes grandezas, como sua área e seu perímetro;

- a área e o perímetro de uma figura não se alteram quando a figura se desloca;
- figuras compostas por partes duas a duas idênticas têm a mesma área, mas podem ter perímetros distintos.

Quando formamos figuras geométricas com peças do tangram (todas ou apenas algumas delas) podemos medir a área da figura formada tomando para unidade de área uma de suas peças. Podemos escolher um triângulo, por exemplo, pois a unidade de área não precisa sempre ser associada a um quadrado. Verificamos, então, que todas as figuras geométricas construídas terão medidas bem simples (inteiras ou fracionárias). Já no trabalho de comparação de perímetros envolvendo as peças do tangram, o professor deve estar atento caso decida escolher o lado de uma das figuras para unidade de comprimento, pois muitos perímetros não terão medidas simples. Sugerimos, neste caso, que ele escolha instrumentos usuais para comparar ou medir comprimentos, como cordões, tiras de papel ou mesmo réguas graduadas, atentando sempre para o caráter aproximado desses experimentos.

O trabalho com malhas é um excelente contexto para o estudo do conceito de área e está muito presente nos livros didáticos. No entanto, esse trabalho pode ser bem mais diversificado do que usualmente é, em sala de aula, se incluir malhas não só quadradas, mas também retangulares, triangulares ou com outras "células básicas". Isto contribui para a compreensão de que a unidade de área é arbitrária. As unidades induzidas pelas "células básicas" são um bom exemplo, também, de unidades não padronizadas.

Na exploração das malhas, outra sugestão é propor a medição, progressivamente ao longo dos primeiros anos do Ensino Fundamental, da área de figuras planas poligonais, dos seguintes tipos:

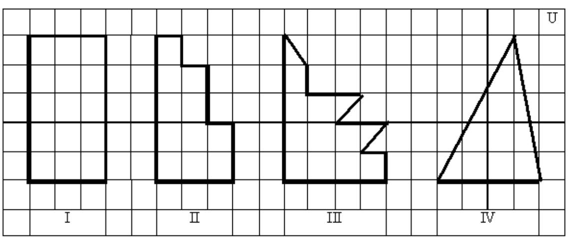


FIGURA 20

Se escolhermos o quadrado básico como unidade de área, representada por U, nos dois primeiros casos, a simples contagem dessas unidades permite obter as áreas de 15 U e 11 U, respectivamente. No terceiro exemplo, é possível contar unidades inteiras e meias unidades para obter a área 11,5 U. No quarto caso, no entanto, é preciso mobilizar estratégias mais elaboradas, entre as quais a de decompor o triângulo dado em dois triângulos menores e obter a área de cada um deles como metade da área de um retângulo, chegando-se a área de 10 U. Nos primeiros anos do Ensino Fundamental, o colega professor não precisa recorrer à "fórmula da área do triângulo" para resolver este último caso.

A exploração sistemática das **fórmulas** deve ser deixada para a etapa de escolarização seguinte. No entanto, os primeiros passos do trabalho com fórmulas podem ser dados mais cedo, em atividades que levem o aluno à aquisição da fórmula que fornece a área do retângulo como produto dos comprimentos de dois de seus lados adjacentes. Por exemplo, no primeiro caso da Figura 20, ao procurar obter o número de quadradinhos unitários que preenchem o retângulo e que nos dá a medida da área do retângulo na unidade U, o aluno pode perceber que não há necessidade de contar todos os quadradinhos da figura, realizando a multiplicação do número de quadradinhos em um dos lados pelo número de quadradinhos no lado adjacente.

Tal estratégia representa um passo importante na aprendizagem da fórmula da área de um retângulo. Aparentemente um passo simples, ele tem, no entanto, se mostrado de difícil compreensão pelas crianças, como revelam inúmeros estudos já realizados. Uma dificuldade observada é que, na contagem dos quadrados cujos lados compõem os lados adjacentes do retângulo, muitas crianças resistem a contar duas vezes o "quadradinho do canto". No caso do exemplo I da Figura 20, calculariam, incorretamente: (3 x 4) U = 12 U ou, então, (5 x 2) U = 10 U.

Professor, você também pode propor uma atividade interessante para a obtenção, pelo aluno, da área de um retângulo, sem o emprego da malha quadriculada. Será preciso desenhar esse retângulo em papel branco e fornecer ao aluno recortes de quadrados unitários, mas em número insuficiente para preencher toda a figura dada. Os alunos serão desafiados a encontrar uma maneira diferente de, simplesmente, contar os quadradinhos e poderão, assim, chegar à estratégia multiplicativa visada. Mas é possível que o problema do "quadradinho do canto" persista neste tipo de atividade. Assim, será preciso atenção a ele.

Em resumo, no estudo da grandeza área, nos anos iniciais, é importante que o aluno vivencie atividades que lhe permitam compreender que:

– a uma figura geométrica (expressão que será usada aqui para designar tanto um objeto físico, um desenho ou imagem quanto uma figura geométrica bidimensional propriamente dita) podem ser associadas diferentes grandezas e a área é uma delas;
– é possível comparar as áreas de duas figuras geométricas sem precisar recorrer a medições;
– figuras geométricas idênticas (que coincidem por superposição) têm mesma área, mas figuras de mesma área não precisam ser idênticas;
– figuras geométricas compostas de pedaços idênticos dois a dois têm a mesma área;
– figuras geométricas com áreas iguais podem ter perímetros diferentes e figuras com mesmo perímetro não precisam ter a mesma área;
– para medir a área utilizamos unidades de área (os triângulos de uma malha triangular podem representar unidades de área, as quais não precisam ser quadrados);
– quando medimos a área de uma figura usando diferentes unidades o número obtido muda, mas a área não se altera; logo para expressar a área o número não é suficiente, é necessário sabermos qual unidade está sendo usada.

Volume e capacidade

Entre as grandezas geométricas estudadas na escola, o volume é um conceito matemático que envolve um grande número de desafios didáticos.

Para maior clareza, retomemos os três componentes que entram em jogo: a) objetos do mundo físico (um dado de jogar, por exemplo); b) representações gráficas desses objetos ou dessas figuras geométricas, que são sempre desenhos ou imagens planas (uma foto ou um desenho, em perspectiva, de um cubo); c) modelos matemáticos desses objetos, as 'figuras geométricas', ou 'sólidos geométricos' (no exemplo, um cubo).

No mundo físico, um objeto tridimensional ocupa parte do espaço ambiente e a esta parte associamos um modelo matemático, uma 'figura geométrica', ou 'sólido geométrico', como já mencionamos neste capítulo. A esses objetos físicos (ou aos sólidos geométricos correspondentes), por sua vez, associamos a grandeza volume. Há, por isso, dois componentes a considerar: objetos e seu volume. Eles estão estreitamente ligados, mas não se confundem, pois diferentes sólidos geométricas podem ter o mesmo volume, ou seja, podem ocupar "o mesmo tanto de espaço".

Para medir o volume de um determinado objeto tridimensional, a unidade de medida fica à nossa escolha. Mas, em muitas situações, há unidades que são mais indicadas. Vejamos um exemplo: comparar os volumes dos sólidos desenhados abaixo:

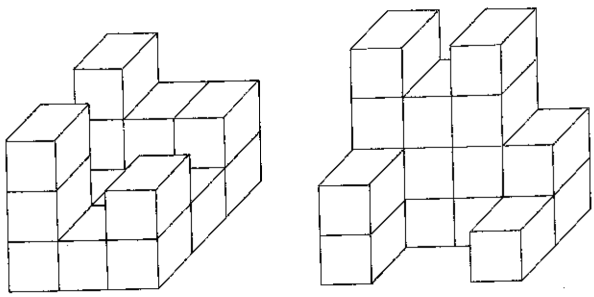


FIGURA 21

Quando o objeto considerado é um recipiente – objeto com espaço interno disponível – surge o conceito de **capacidade**, que nada mais é do que o volume da parte interna de tal objeto. Assim, volume e capacidade são a mesma grandeza, em contextos diferentes.

Há estreita ligação entre a capacidade de um recipiente e o volume de líquidos que podem ser depositados nele. Tal ligação resulta das propriedades físicas da matéria em estado líquido que ocupa "o espaço disponível" e faz com que se possa utilizar "a quantidade de líquido contido" para dar a ideia de capacidade de recipientes, ou mesmo, para comparar capacidades de recipientes. No entanto, o emprego da expressão acima pode levar à ideia de que "a quantidade do líquido contido" é a "massa do líquido contido", o que gera confusão entre duas grandezas distintas, **volume**

e massa. Por isso, é preciso cautela no emprego da expressão e não seria adequado tomá-la como definição desse conceito matemático, pois a capacidade de um recipiente não depende de haver líquido, ou qualquer outro tipo de material, nele. Além do mais, nos recipientes que são usados no dia a dia, o volume ocupado pelos líquidos que eles contêm é sempre um pouco menor do que a capacidade total desse recipiente.

Ângulo

No nosso cotidiano, os ângulos aparecem no par de ponteiros de um relógio, nos "cantos" de uma folha de papel ou de recortes poligonais, nos movimentos de rotação em torno de um ponto ou de um eixo e em muitas outras situações. Na escola, desde o início, ao lidar com objetos geométricos como os triângulos, quadriláteros ou outros polígonos, as crianças entram em contato com a noção de ângulo. Contudo, o conceito de ângulo, justificadamente, só é objeto específico de estudo a partir do 4º ano e, com mais frequência, a partir do 5º ano do Ensino Fundamental. A noção de ângulo parece simples. No entanto, quando procuramos criar um modelo matemático para este conceito, com preocupação de ensiná-lo, a tarefa não se mostra nada fácil. Além disso, os estudos revelam que as crianças têm muitas dificuldades na aprendizagem deste conceito.

Um modelo matemático que pode ser associado aos ângulos do mundo físico é constituído por duas semirretas com um mesmo ponto inicial, denominado **vértice** do ângulo. As semirretas são chamadas de **lados** do ângulo. Para representar simbolicamente um ângulo podemos escolher uma letra para o seu vértice, uma letra para um ponto qualquer em cada um de seus lados e formar o símbolo composto $\angle BAC$ (ou $\angle CAB$).

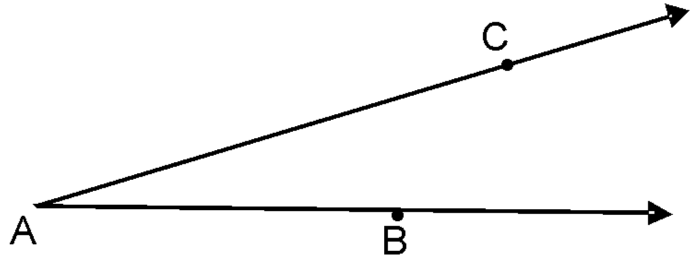


FIGURA 22

Temos, assim, um objeto geométrico e as questões que surgem são:
Que grandeza pode ser associada a este objeto geométrico?

No modelo matemático, os lados de um ângulo são ilimitados, por serem semirretas, portanto não podemos levar em conta os seus comprimentos. A grandeza relevante em um ângulo é o que poderíamos chamar abertura do ângulo. Nas imagens seguintes, como comparar dois ângulos $\angle ABC$ e $\angle MNP$ segundo suas aberturas?

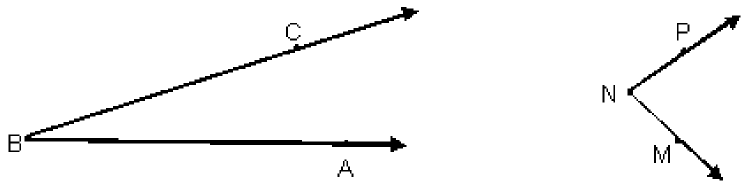


FIGURA 23

Podemos recorrer a regras matemáticas que nos permitam construir outro ângulo $\angle M'N'P'$, com a mesma abertura do ângulo $\angle MNP$, mas situado como na ilustração abaixo:

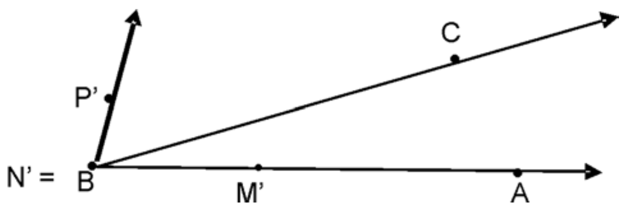


FIGURA 24

Se a semirreta BC, excetuando-se sua origem B, estiver contida no interior do ângulo $\angle P'BA$ é possível dizer:

A abertura do ângulo $\angle MNP$ é maior do que a abertura do ângulo $\angle ABC$.

Na verdade, o que dizemos, usualmente, é:

O ângulo $\angle MNP$ é maior do que o ângulo $\angle ABC$.

Nesta afirmação, o mesmo termo 'ângulo' que é utilizado para designar o objeto geométrico é utilizado também para designar a grandeza associada a ele, isto é, sua abertura.

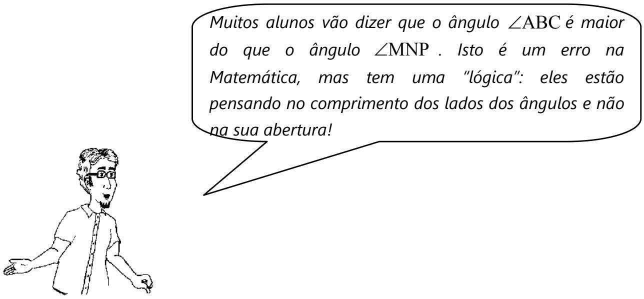


FIGURA 25

Como semirretas são objetos ideais ilimitados, o que o aluno comparou, na verdade, foram os comprimentos dos segmentos que representam as semirretas. Aparece aqui mais um exemplo da relação complexa entre o objeto matemático (semirreta) e o seu desenho (segmento de reta).

Pode acontecer que, dados dois ângulos distintos, quando fizermos o "transporte de ângulo", ocorra uma coincidência das semirretas que os formam. Concluiríamos, então, que as aberturas dos ângulos seriam iguais, embora os ângulos, eles próprios, fossem diferentes. Mas, neste caso, como anteriormente, apesar de existir a distinção entre ângulo e abertura do ângulo, ela não é traduzida na linguagem usual no ensino em nosso país. Por isso, diríamos, que os mencionados ângulos seriam iguais.

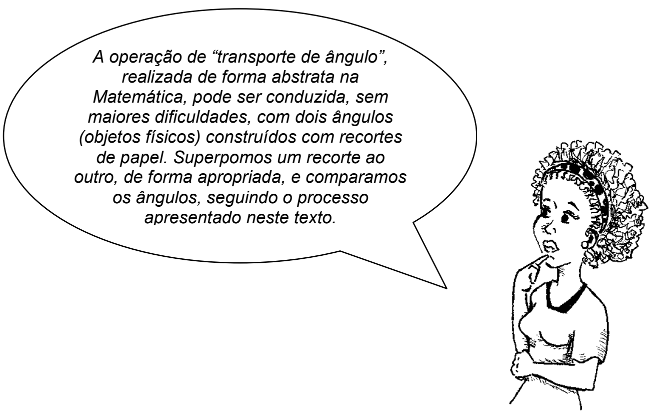


FIGURA 26

É possível iniciar o estudo da medida de ângulos com a introdução do ângulo reto, cujo modelo concreto pode ser obtido de diversas maneiras: no "canto" de uma folha de papel, por meio de dobraduras, em esquadros etc. Se associarmos o ângulo ao giro de uma semirreta em torno de sua origem, podemos falar, por exemplo, do ângulo de um "giro completo", de "meio giro" e de um "quarto de giro", este último correspondendo a um ângulo reto. Posteriormente, a tais giros são atribuídas, respectivamente, as medidas de 360°, 180° e 90°.

O ideal é que o trabalho com a medida do ângulo em graus, com o uso do transferidor, seja feito nos últimos anos da primeira etapa do Ensino Fundamental – 4º ou 5º ano – dadas as dificuldades para o uso deste instrumento de medida, em particular, porque a unidade 'grau' não é facilmente visualizada pela criança. Em virtude disso, alguns professores têm preferido utilizar transferidores construídos em papel transparente, com uma unidade não convencional de ângulo bem maior do que o grau.

Tempo

O estudo do conceito de tempo é muito mais complexo do que o das grandezas geométricas que foram abordadas até este ponto, por não estar associado a um objeto, mas a fenômenos do mundo físico. Apesar disso, os múltiplos aspectos relativos ao tempo estão de tal maneira presentes na vida de todas as pessoas que justificam, sem dúvida, o seu estudo nos anos iniciais da escolaridade.

O ensino da noção de tempo deve, pela sua complexidade, partir das experiências vividas pelas crianças e, progressivamente, avançar para a aquisição de competências e conceitos mais elaborados.

Algumas atividades podem auxiliar essa compreensão, como as que visam: explorar a ideia de antes e depois; estabelecer uma sequência temporal para a montagem de determinados objetos ou a execução de uma receita; construir uma **linha do tempo**, com amplitude de um dia, por exemplo, em que os alunos identifiquem a hora de ir para a escola, de almoçar, de dormir, entre outras. Podemos, também, recorrer aos aniversários, ou às datas comemorativas de festas importantes das diversas culturas, para estabelecer momentos em uma linha do tempo anual.

Igualmente pode ser entendido como um trabalho relativo a linhas do tempo, o estudo do calendário utilizado na grande maioria dos países ocidentais – o Calendário gregoriano –, que recebe bastante atenção nos livros didáticos desde os primeiros anos. Trata-se, aqui também, de um conteúdo de difícil aprendizagem, mas, apesar disso, importante e com o qual podemos estabelecer conexões com outras disciplinas, como História, Geografia e Ciências.

O professor deve estar atento para as dificuldades, que não são poucas, para a aprendizagem da leitura das horas em relógios de ponteiros. A este respeito, convém observar que alguns livros didáticos contêm desenhos de relógios nos quais os ponteiros ocupam posições incompatíveis com o funcionamento normal desses aparelhos.

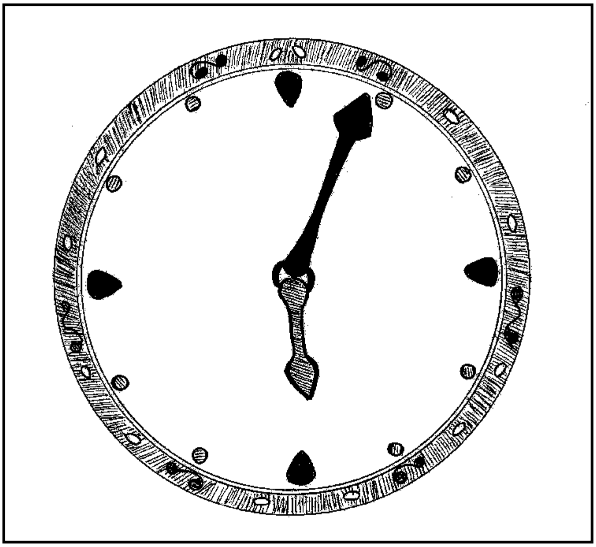


FIGURA 27

Um exemplo de falha no desenho de relógios pode ser observado na figura 27.

Em uma fase em que a criança está fazendo as primeiras leituras das horas, a presença de tais ilustrações é, certamente, prejudicial à aprendizagem dessa habilidade.

Em particular, é interessante o trabalho de construção de uma agenda de atividades semanais da criança.

Outra habilidade relativa ao tempo, que é bastante ensinada em praticamente todos os livros didáticos, envolve a leitura de horas em relógios de ponteiros ou em relógios digitais.

A observação de fenômenos, do seu momento inicial ao seu término, nos conduz à grandeza associada ao tempo: **a duração de intervalos de tempo**.

As comparações entre durações de dois eventos rotineiros, iniciados ao mesmo tempo, podem ser feitas em fases iniciais da aprendizagem, com apelo a questões do tipo: *O que demorou mais?*

As medições ou estimativas podem ser abordadas com base na rotina diária da criança: *Quanto tempo você leva para escovar os dentes? Quanto tempo você passa na escola? Quanto tempo você leva assistindo à televisão por dia?* Tais questões contribuem para dar sentido à grandeza tempo e, ao mesmo tempo, possibilitam discussões de temas interdisciplinares ou de formação mais ampla das crianças.

O trabalho com unidades de tempo, iniciado com o dia e a hora, pode, gradualmente, ser ampliado para incluir: ano, mês, semana, minuto e segundo.

Além disso, são ricas, do ponto de vista interdisciplinar, atividades que conduzam o aluno a observar a duração de fenômenos naturais como o dia, a noite, o período de gestação de animais, de germinação e crescimento das plantas, o tempo decorrido entre o plantio e a colheita.

Do ponto de vista dos modelos matemáticos, atividades com a linha do tempo, tais como as mencionadas anteriormente, são análogas às de identificação de pontos em uma reta numérica. Nessa analogia, a duração de intervalos de tempo corresponderia ao comprimento de intervalos da reta numérica.

Ainda a respeito da duração de intervalos de tempo encontramos, algumas vezes, no ensino de Matemática, atividades em que dois personagens, Pedro e Maria, percorrem caminhos diferentes para ir de suas casas à escola e pergunta-se, então: *Quem demora mais a chegar à escola?* O que se espera, neste caso, é que o aluno utilize as distâncias percorridas para comparar os tempos de percurso dos dois personagens. Nessas atividades, é preciso cautela, pois a comparação só é válida se for dada alguma informação sobre a velocidade com que os caminhos vão ser percorridos, que deve ser aproximadamente a mesma.

Valor monetário

O valor monetário é uma grandeza associada à troca de bens ou à prestação de serviços, que está presente no cotidiano das pessoas e, quase sempre, faz parte, em suas manifestações mais simples, do universo das crianças. Por isso, o ensino de Matemática desde os anos iniciais da escolaridade tem dedicado atenção ao trabalho com o dinheiro – cédulas e moedas – utilizado atualmente em nosso país e seus inúmeros usos. Em particular, esse trabalho está presente na maioria dos livros didáticos. Como um dos papéis da matemática escolar é contribuir na direção de formar para a cidadania, a tendência acima apontada é bem justificada.

Além disso, do ponto de vista da aprendizagem do sistema de numeração decimal, objetivo fundamental dessa fase da escolaridade, o trabalho com o dinheiro contribui para a construção das ideias básicas desse sistema. E não é só isso. A representação decimal dos preços, em reais e em centavos, é de extrema valia para a familiarização das crianças com a representação decimal dos números racionais, cujo estudo também é iniciado nos primeiros anos do Ensino Fundamental.

Massa

O estudo da massa como uma grandeza física básica certamente ultrapassa bastante os horizontes do Ensino Fundamental. No entanto, os usos sociais dessa grandeza são tão frequentes que se justifica plenamente uma abordagem desse conceito, ainda que sem formalizações, desde os primeiros anos escolares.

Intuitivamente, a massa de um corpo é a quantidade de matéria desse corpo. Na linguagem usual, esse atributo dos corpos físicos é o seu 'peso'. Sabemos, no entanto, que o peso de um corpo é uma grandeza de natureza distinta de sua massa, por ser uma grandeza vetorial associada à força da gravidade, exercida pela Terra sobre o corpo. Mas, a identificação promovida pela linguagem usual não é sem razão. Nos modelos da Física Clássica, se nos restringirmos à superfície da Terra, a intensidade dessa força de atração, o peso do corpo, é diretamente proporcional à sua massa.

Se compreender o significado do conceito de massa é tarefa difícil no início da aprendizagem, o mesmo não se pode dizer da tarefa de comparar as massas de dois corpos. As balanças de dois pratos, que podem ser confeccionadas de forma rudimentar na sala de aula, permitem facilmente sabermos qual de dois corpos tem a massa maior (o "peso" maior) ou se os dois têm a mesma massa (o mesmo "peso").

O uso de balanças com mostradores digitais, ou de outro tipo, vai permitir a familiarização com o quilograma (kg), a unidade fundamental de massa do Sistema Internacional, e pode ser iniciado nessa fase do Ensino Fundamental.

Outras grandezas

As recomendações curriculares nacionais e de outros países indicam que a atenção nos primeiros anos do Ensino Fundamental concentre-se no estudo das grandezas mencionadas anteriormente.

Contudo, outras grandezas podem ser focalizadas, desde que se leve em conta as possibilidades de cada classe e se promova uma abordagem inicial e informal de tais grandezas.

Podem ser citadas nesta categoria, por exemplo, a **temperatura**, a **velocidade**, a **energia**, a **densidade**, a **intensidade do som**, entre outras.

O tratamento da informação

*Mônica Cerbella Freire Mandarino**

Em consonância com uma tendência mundial que enfatiza um ensino de Matemática voltado para a compreensão e intervenção social, os Parâmetros Curriculares Nacionais, em 1996, propõem a inclusão, nos currículos de Matemática, de novo bloco de conteúdos denominado tratamento da informação. Assim, no Brasil, mesmo que um pouco tardiamente, passa-se a valorizar conhecimentos do campo da **Estatística**, anteriormente pouco explorado por professores e pelos livros didáticos.

A **Estatística** é cada vez mais utilizada, o que se percebe pela simples observação de que os meios de comunicação divulgam, com muita frequência, resultados de pesquisas das mais diversas áreas do conhecimento envolvendo estratégias estatísticas e suas formas de apresentação de dados.

> Os conteúdos deste campo de conhecimento visam ao desenvolvimento de competências e habilidades para lidar com informações cada vez mais relevantes em diversas situações da vida moderna. Pode-se dizer que o principal objetivo é tornar o aluno capaz de entender e comunicar dados e tomar decisões a partir da análise de dados.

* Doutora em Educação. Professora da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO). Docente dos Programas de Mestrado em Educação da UNIRIO e de Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ).

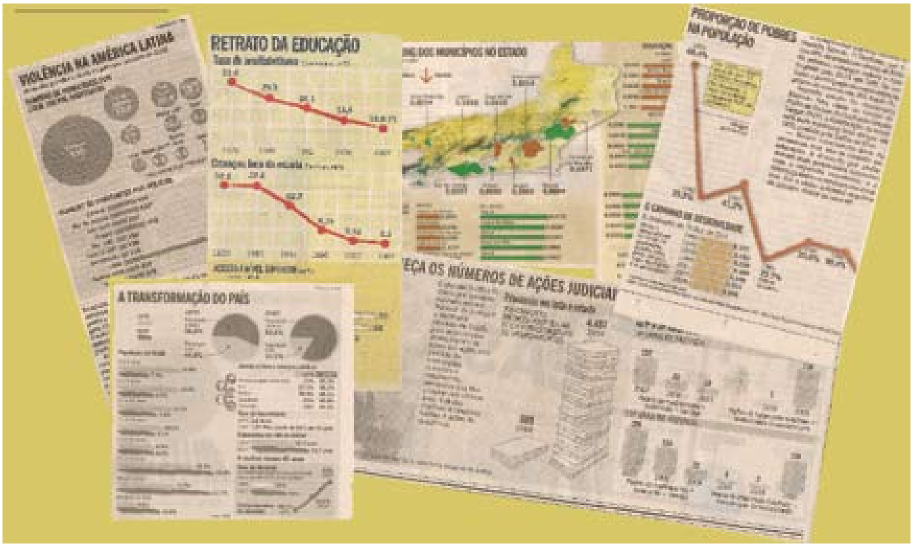


FIGURA 1

Sem dúvida, as pesquisas sociais, econômicas, de saúde, educacionais, sobre segurança e violência etc., estão presentes em conversas do dia a dia e influenciam muitas decisões políticas, governamentais e até pessoais. A compreensão crítica das informações disponibilizadas depende do desenvolvimento da capacidade de ler **gráficos e tabelas**. Mas isso não basta. A compreensão crítica destas informações também implica formas de raciocínio e pensamento para lidar com a incerteza, ou seja, com **fenômenos aleatórios,** tema que será discutido neste capítulo.

Pesquisas envolvendo estratégias da Estatística e as que incluem a Probabilidade influenciam nossas vidas de diversas formas. Hoje em dia, quase todas as empresas realizam pesquisas de mercado, testam seus produtos para definir prazos de validade ou critérios de segurança, por exemplo. Assim, vemos um produto que gostávamos desaparecer do mercado, somos pegos de surpresa com alterações na programação da TV, comemos o que as pesquisas afirmam que é melhor para nossa saúde, respondemos incessantemente a questionários, e assim por diante. É preciso preparar nossos alunos para uma sociedade que valoriza cada vez mais o levantamento de dados e a divulgação de informações, nem sempre confiáveis e de acordo com os interesses de todos os setores sociais.

FIGURA 2.1

Além de ser necessário saber ler e analisar criticamente resultados de pesquisas e fazer inferências com base em suas informações, é importante também que sejamos capazes de produzir informação, ou seja, **coletar, organizar, confrontar, fazer previsões e tomar decisões a partir de dados numéricos**. O desenvolvimento de tais capacidades, fundamentais à formação plena do cidadão, envolve o estudo de conceitos do campo que já nos acostumamos a denominar de **tratamento da informação**.

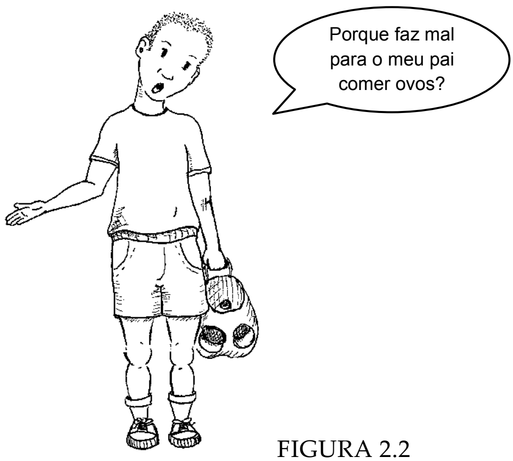


FIGURA 2.2

Neste capítulo vamos discutir algumas possibilidades de trabalho didático no campo de tratamento da informação. Nesta seleção levamos em conta, ainda, dúvidas que muitos docentes dos anos iniciais têm nos reportado em cursos de formação continuada e em nossas pesquisas. Além disso, devido à abordagem frequentemente insuficiente ou equivocada dos conceitos deste campo realizada pela maioria dos livros didáticos, buscamos discutir conceitos, evidenciar aspectos importantes para a formação do aluno e apontar caminhos para o trabalho docente.

Por que tratamento da informação nos anos iniciais?

O trabalho com conceitos do campo do **tratamento da informação** pode se iniciar já na Educação Infantil de forma prazerosa e com foco em experiências do interesse das crianças. Desde os primeiros anos de escolarização, os alunos podem lidar, em jogos e brincadeiras, com princípios de contagem e determinar resultados possíveis, o que, por sua vez, abre caminho para problemas simples e interessantes de probabilidades, ou de "chance" de ocorrência de um resultado.

O importante é que os conteúdos do tratamento da informação deixem de ser tratados como suplementares ao trabalho que cotidianamente se realiza nas salas de aula e na seleção e distribuição de conteúdos dos livros didáticos.

Por serem conhecimentos cada vez mais relevantes em diversas situações da vida moderna, o campo do tratamento da informação articula-se bem com conteúdos de outros campos da Matemática e com atividades de diversas áreas do currículo escolar. No entanto, o estudo dos conceitos não deve ocorrer sem planejamento ou sem que se abordem suas especificidades.

Para crianças de diversas faixas etárias é possível realizar atividades voltadas ao desenvolvimento de competências e habilidades para coletar, organizar e analisar dados, bem como às capacidades de ler, interpretar, estabelecer relações e lidar com situações que envolvem um contexto probabilístico.

A criança é curiosa por natureza. Ela indaga, questiona... Podemos tirar muito proveito de sua curiosidade natural, sobre situações, tais como: como são as famílias dos alunos da minha classe? Quais as suas preferências de comida, brincadeiras etc.? Quais são as características de certos animais? Se eu jogar com meu colega, quem tem mais chance de ganhar? Por quê?

FIGURA 3

São muitos os temas sobre os quais podemos desenvolver pesquisas com as turmas dos anos iniciais. Como organizar a pesquisa e como interpretar os dados coletados vai **depender da faixa etária da criança**. Crianças da Educação Infantil já podem realizar levantamentos de dados como os citados no parágrafo anterior. Ao longo dos anos iniciais podemos propor pesquisas cada vez mais complexas quanto ao tema ou que envolvam grupos maiores. Por exemplo: o estudo do tipo de lixo produzido pelas famílias (que porcentagem do lixo produzido poderia ser reciclado?), o levantamento das possibilidades de emprego na cidade (quais são as empresas existentes e que tipo de emprego oferecem?), uma pesquisa de preços das lanchonetes do bairro, dentre outras possibilidades.

A pesquisa estatística na escola

Projetos envolvendo levantamento e organização de dados são excelentes para levar a criança a tomar contato com o campo da **Estatística** e a desenvolver um tipo de raciocínio diferente, ou seja, um **raciocínio que envolve a incerteza**. Quando lidamos com a Estatística os resultados devem ser vistos como indicativos, tendências e não respostas fechadas e únicas. Esta concepção é bem diferente do que ocorre na resolução de problemas de outros campos da Matemática.

Projetos de pesquisa estatística precisam ser bem planejados para que seja possível vivenciar todas as suas etapas: o planejamento da pesquisa; a coleta de dados; a organização dos dados coletados; e a interpretação dos resultados.

O planejamento da pesquisa

Esta fase envolve a definição clara "do que se quer saber", ou seja, **da questão** ou **questões** que o pesquisador buscará responder. A clareza da questão de pesquisa é que possibilitará definir a **população** envolvida e como os dados serão coletados. Tais decisões determinam também o que se poderá afirmar após a pesquisa.

É sempre importante ter claro qual é a **população da pesquisa**, tanto em pesquisas a serem realizadas pelas próprias crianças, quanto em atividades de leitura e interpretação de resultados obtidos em outras fontes.

Por exemplo, se a **questão** de pesquisa é saber quais os programas de TV a que os alunos da turma assistem, a população já está definida: são todas as crianças da turma. É preciso, no entanto, ter claro que os resultados obtidos só serão válidos para aquela turma. Por isso, eles não poderão ser usados para fazermos afirmações sobre o programa preferido pelas crianças da escola, do bairro e, muito menos, da cidade. A turma não pode ser considerada uma **amostra** destas populações, a pesquisa não foi planejada para isso. Discutir este aspecto com as crianças é um passo para a compreensão crítica desta e de outras pesquisas.

O uso de **amostra** para que se possa fazer afirmações sobre uma população maior envolve conhecimentos sobre técnicas de **amostragem**, o que não é simples para crianças dos anos iniciais do Ensino Fundamental. No entanto, com crianças do 3º ano em diante, pode-se realizar amostragens para populações um pouco maiores, alertando que a escolha dos elementos da amostra deve ser aleatória. Isso significa que todos os elementos da população devem ter a mesma chance de participar da pesquisa. Além disso, a amostra precisa ser representativa de todos os tipos que integram a população. Por exemplo, se a população da pesquisa é formada por todas as crianças da escola, a amostra deve conter alunos de todas as turmas e dentro das turmas a escolha deve ser aleatória. Desta forma estaremos, aos poucos, contribuindo para a compreensão dos conceitos de **população**, **amostra** e técnicas exigidas para obtenção da amostra.

Os cuidados com esta primeira etapa da pesquisa estatística devem ser sempre ressaltados. Às vezes são propostos projetos de levantamento de dados pelas crianças sem que haja qualquer advertência para a importância do estabelecimento claro da **questão**, da **população** e da **amostra**, no caso do uso de amostragem.

Os objetivos de uma pesquisa

Discutir o "**para quê**" de uma pesquisa é muito importante. Vale lembrar que ninguém coleta dados só para exibi-los e que as pesquisas possuem objetivos.

Pesquisas sem objetivo definido devem ser evitadas. Por exemplo, suponha que é proposta uma pesquisa sobre as idades dos alunos da turma e os aniversariantes de cada mês e solicitada a colocação dos dados em tabelas ou gráficos já preparados pelos autores do livro didático ou pelo professor. Não devemos nos restringir a fazer aos alunos perguntas, como: Em qual mês do ano há mais aniversariantes? Em que mês há menos?

Professor: que tal tirar mais proveito de propostas deste tipo e começar definindo com as crianças **para quê** será feito este levantamento. Esta decisão influenciará a organização dos dados. Interessa a idade ou o mês de nascimento? Que destino será dado a estas informações? A idade servirá para agrupar os alunos para algum jogo? Os meses de aniversário serão agrupados para comemorações por semestre ou trimestre? Será útil contar separadamente meninos e meninas? No gráfico da Figura 4, damos um exemplo de como organizar, em um gráfico, dados colhidos em uma pesquisa desse tipo.

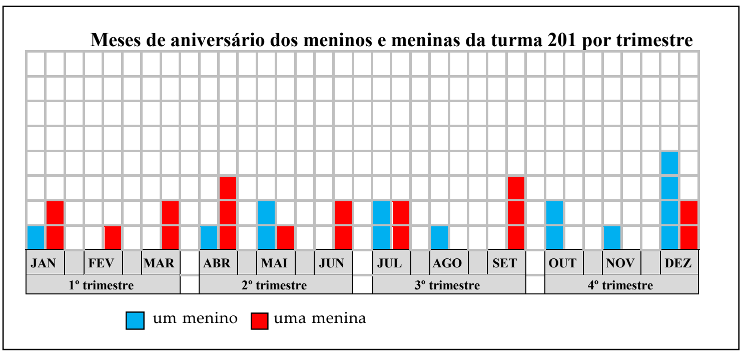


FIGURA 4

As atividades podem ser menos mecânicas

Quando os livros didáticos propõem pesquisas estatísticas o mais comum é a questão já estar definida e a população se restringir à própria turma, sem valorizar o planejamento da pesquisa. Além disso, o tipo de abordagem costuma tornar o trabalho das crianças pouco reflexivo e criativo.

Observe o exemplo da Figura 5. Nele está definida a população (todos os alunos da turma); o objeto de estudo (desenho animado preferido); a delimitação das opções de escolha (cada aluno terá quatro opções e só pode escolher uma); a forma de registro dos dados (marcação das escolhas subdivididas em meninas e meninos).

VAMOS PESQUISAR

Você e seus colegas de turma devem fazer uma pesquisa na sala de aula para saber qual o desenho animado que os meninos e meninas preferem.

A classe deve escolher quatro desenhos animados para colocar em votação. Depois cada aluno escolhe somente um desenho como o seu preferido.

Juntem as informações e façam um gráfico de barras duplas com o número de meninos e de meninas da turma que preferem cada desenho.

FIGURA 5

Apesar de ser esta uma atividade que traz diversas informações importantes para o planejamento da coleta de dados, ela não estimula que se observem estes aspectos, nem a criatividade para fazer adaptações. Note que não há qualquer decisão deixada a cargo dos alunos, até o tipo de gráfico que será usado para organização dos dados já está definido, e sem nenhuma justificativa.

De modo geral, para tratar de levantamentos de dados, os livros didáticos priorizam a apresentação de informações fictícias. A Figura 6 simula um tipo de atividade presente em muitos dos livros analisados para o PNLD 2010. Note que os “dados” já foram coletados e a forma de anotação dos mesmos também está decidida. Cabe ao aluno, apenas, fazer alguma contagem.

➢ Leia o problema e responda as questões.
Ao fim da visita ao zoológico, a professora resolveu fazer uma pesquisa sobre os animais vistos no passeio, perguntando aos alunos, de que animal eles mais gostaram.

Respostas
- Eu gosto do macaco ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
- Eu gosto do jacaré ○ ○ ○ ○ ○
- Eu gosto da girafa ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
- Eu gosto do elefante ○ ○ ○ ○ ○ ○

Agrupe os votos de cinco em cinco. Alguns votos irão sobrar.

FIGURA 6

A atividade deste exemplo não leva a criança a refletir sobre o planejamento (Havia outras opções de escolha? Todas as crianças que foram ao passeio votaram?) não se estimula qualquer reflexão sobre outras formas de organização dos dados (Teria sido mais rápido formar quadradinhos? colocar pontinhos?). Ressaltamos que diferentes formas de organização podem surgir, dependendo da questão que deu origem à pesquisa.

É muito comum, também, nos livros didáticos, os dados já estarem organizados em tabelas ou gráficos. Mais uma vez, sem qualquer indicação sobre a coleta dos dados, pois quase sempre o que se deseja é uma consulta aos números envolvidos para a realização de algum cálculo.

No exemplo que apresentamos na Figura 7, adaptado de um livro didático, as perguntas propostas aos alunos eram: qual o brinquedo preferido? Quantas crianças foram consultadas? Sem dúvida o melhor planejamento e exploração de atividades deste tipo pode contribuir mais efetivamente para o aprendizado de conceitos do campo do tratamento da informação.

Professor: Que tal enriquecer este trabalho discutindo com a turma: Que título deveria ter este gráfico? Quem terá feito esta pesquisa? Com que objetivo? Como será que os dados foram coletados (entrevista, cédula de votação)? Os dados poderiam ser apresentados de outra forma? Quais? A quem o resultado da pesquisa pode ser útil?

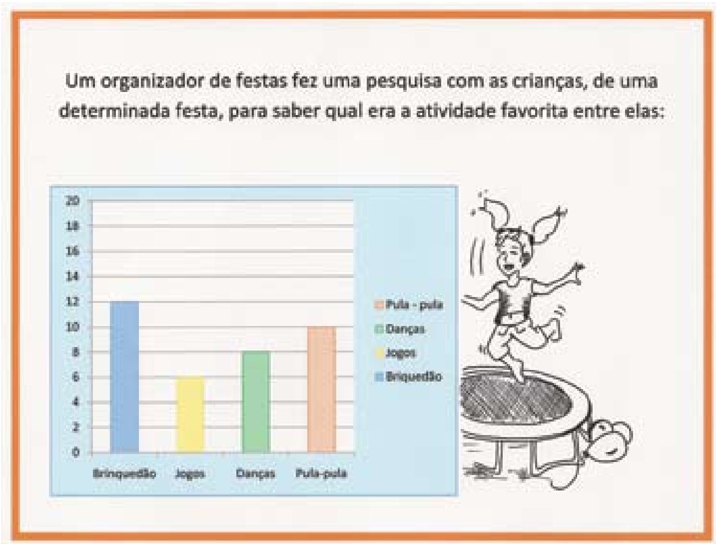


FIGURA 7

A partir da discussão em sala, podemos propor que: (a) grupos de alunos organizem os mesmos dados de outras formas (tabelas e diferentes tipos de gráficos); (b) a turma, com o mesmo tema ou outro similar, realize sua própria coleta de dados.

A fonte da pesquisa é uma informação fundamental

A falta de cuidado com a formação de conceitos e hábitos para lidar com dados de pesquisas também se observa quando não se informa a fonte dos dados. Essa informação é uma exigência para pesquisadores e a imprensa, e deveria ser uma preocupação dos livros didáticos. Nós, professores, podemos acostumar nossos alunos a terem esta preocupação, desde as pesquisas simples que realizamos com eles em sala de aula. E isso é fácil, basta sempre colocar a fonte abaixo de qualquer gráfico ou tabela construído com os alunos. Por exemplo:

Fonte: pesquisa realizada por alunos da turma A da Escola B, em abril de 2010.

Em situações de aprendizagem, não basta indicar a fonte, é preciso apresentar, mesmo que brevemente, qual foi a **questão** de pesquisa e como ela foi realizada: onde, em que época, com que população e se apenas parte da população (amostra) foi usada para a coleta de dados. É a partir destas informações básicas que podemos discutir se os procedimentos foram adequados para coleta de dados e desenvolver a capacidade de avaliar criticamente resultados de pesquisas.

O exemplo da Figura 8 é bem interessante, neste sentido. Como o assunto tratado é extremamente importante, pois diz respeito a questões do meio ambiente, e pode suscitar discussões interessantes sobre as diferenças entre pobres e ricos, é essencial sabermos qual a fonte das informações fornecidas. Sem isso, como podemos ter confiança nesta informação?

Uma informação interessante
Vivemos em uma sociedade na qual se consome muito. Veja os anúncios de TV sempre insistindo para as pessoas comprarem, comerem ou beberem.
Como se consome muito, produtos antigos são postos no lixo e os novos são embalados com material que também é posto no lixo e demora séculos para voltar à natureza.
Dessa forma, se produz cada vez mais lixo no mundo.
Países ricos costumam produzir mais lixo que os pobres. No Brasil, o estado de São Paulo é o que mais produz lixo. Tirando a média do mundo todo se pode estimar que cada pessoa acabe produzindo 5 kg de lixo por semana. Para onde vai a maior parte desse lixo?

FIGURA 8

Os jogos e o tratamento da informação

Jogos são excelentes oportunidades para coleta de dados. O professor pode preparar com seus alunos uma tabela, que ficará disponível durante o jogo, para que os resultados sejam anotados. Este é um tipo de tabela diferente, cuja estrutura deve priorizar a anotação de cada resultado e sua forma depende do tipo de jogo e do que se deseja anotar. Veja alguns exemplos:

Pontos obtidos no jogo de dados

Grupo	1ª rodada	2ª rodada	Total

Resultados do jogo de boliche

Nome do aluno	Pinos derrubados

FIGURA 9

Depois do jogo, podem-se realizar atividades de organização dos resultados em diferentes tipos de tabelas e gráficos. Encontramos em alguns livros propostas de tabelas prontas para simples preenchimento, que não estimulam a criatividade dos alunos a partir da **questão** de pesquisa e do "**para quê**" se está pesquisando.

O exemplo a seguir mostra, à esquerda, uma tabela para organização das contagens dos pontos de um jogo de "cara ou coroa", montada de forma inadequada. À direita, vemos uma opção de tabela que possibilita a organização correta dos dados. Observe como a tabela da direita fornece mais informações e deixa claro do que estamos tratando: Em primeiro lugar, diz que se tratam dos resultados de um jogo de cara ou coroa; em segundo lugar, indica como os jogadores procederam. Por fim, mostra os resultados do jogo, dispostos em uma tabela apropriada. Tente usar as duas tabelas em um jogo real de cara ou coroa e observe que a tabela da esquerda, além de não fornecer as informações que se encontram na da direita não pode ser preenchida.

ERRADO

Os pontos devem ser anotados na tabela a seguir. Ganha o jogo quem fizer mais pontos.

	Jogadores	Pontos
Cara		
Coroa		

CERTO

Resultados do jogo de CARA ou COROA.

Cada jogador joga a moeda quatro vezes e anota quantas vezes obteve CARA ou COROA.

JOGADORES	CARA	COROA	Total

 FIGURA 10

O tratamento da informação favorece a interdisciplinaridade

É bom lembrar que pesquisas estatísticas não envolvem apenas pessoas, muitas vezes o interesse está em levantar dados sobre animais, objetos, clima etc. Para isso, é importante propor pesquisas nas quais a **população** não seja sempre formada por alunos, pais, professores etc.

Podemos realizar pesquisas interessantes envolvendo outros campos da própria Matemática, como **grandezas e medidas** e, desta forma, contribuir para a formação de conceitos de mais de um campo. Que tal levantar o peso das mochilas que as crianças carregam ou medir o comprimento de um corredor usando diferentes unidades de medida? Podemos propor pesquisa sobre preços de alguns produtos em diferentes lojas, a temperatura que marca um termômetro perto da escola, em um mesmo horário, durante um certo período de tempo; a quantidade de vezes que as pontas de lápis se quebram durante as aulas.

A leitura e interpretação de notícias publicadas pela imprensa e a consulta a dados de outras áreas do conhecimento podem contribuir para um verdadeiro trabalho interdisciplinar. Os livros de Geografia, os atlas geográficos e o *site* do IBGE, por exemplo, são excelentes fontes de dados, importantes para a formação geral dos alunos, além de abordarem temas que podem desafiá-los a desenvolver pesquisas em seu ambiente. O importante é o professor ter claro os objetivos de aprendizagem para que os conceitos do campo do tratamento da informação não sejam tratados como meros coadjuvantes ou apenas ferramentas técnicas.

A organização dos dados

As tabelas e os gráficos são recursos que a Estatística usa para organizar e apresentar dados de pesquisas. O objetivo destes recursos é facilitar a leitura e a consulta aos dados. Assim, é importante desenvolver habilidades de uso destas ferramentas, mas sem restringir o estudo do **tratamento da informação** apenas a estes conteúdos.

É importante que os gráficos e tabelas sejam parte de uma pesquisa bem estruturada, que inclua o levantamento dos dados e sua organização em tabelas ou gráficos, sem excluir a possibilidade de termos os dois tipos de organização.

Em geral, a confecção de um gráfico se faz a partir de dados já organizados em uma tabela, principalmente se a pesquisa resultou em muitos dados. Neste sentido, discutimos nesta seção a importância da escolha adequada da forma de organização dos dados. Podemos sempre recorrer a diferentes tipos de tabelas e de gráficos e há requisitos de construção e de apresentação que precisam ser ensinados aos alunos.

A habilidade de classificar é fundamental neste trabalho

A primeira etapa para o uso de tabelas e gráficos é a classificação do que são os dados. Devemos ter cuidado para evitar classificações inadequadas. Por exemplo, classificações com superposição de valores e que deixam os alunos inseguros sobre onde colocar esta ou aquela informação. Isso acaba levando à contagem de um mesmo dado mais do que uma vez. Por exemplo, se desejamos fazer um gráfico mostrando as massas (pesos) dos alunos da escola, e resolvermos agrupar os resultados em intervalos de 10kg, é errado classificá-los em: "alunos de 20 a 30kg", "alunos de 30 a 40kg" e "alunos entre 40 e 50kg". Se fizermos isso, um aluno com 30kg estará no primeiro e no segundo grupo.

No caso acima, como você classificaria (gruparia) os resultados?

As tabelas para apresentação de resultados de pesquisa

A construção de tabelas é uma atividade que as crianças gostam de realizar e que envolve habilidades matemáticas importantes. Devemos começar com uma boa discussão da estrutura da tabela, e nossa experiência em sala de aula mostra que a **primeira versão não será a definitiva**, **se valorizarmos uma forma participativa de trabalho**. O mais comum é iniciarmos a organização dos dados com uma tabela que vai se aperfeiçoando aos poucos, conforme aparecem impasses para a colocação dos dados. Tal dinâmica ajuda a aprendizagem e a elaboração de estratégias para construção de tabelas, caso as necessidades de alteração sejam discutidas, buscando-se justificá-las.

Além disso, é preciso ajudar as crianças a perceberem que as tabelas devem ser suficientemente claras para que outras pessoas as consultem e entendam. Assim, é preciso que elas tenham um título e uma linha que chamamos de cabeçalho, na qual a classificação dos dados fica estabelecida, além de ser bastante útil a tabela conter uma linha de totalização dos dados. Não podemos esquecer a fonte, que informa a origem dos dados ou como a informação foi coletada.

Esportes preferidos pela turma A

Esporte	Votos
Vôlei	8
Basquete	5
Futebol	14
Natação	7
Atletismo	6
Total	40

Fonte: pesquisa realizada pelos alunos no mês de abril de 2010.

Linha de cabeçalho

Linha de totalizações

FIGURA 11

A tabela do exemplo acima é chamada **tabela simples,** ou **tabela de única entrada,** por conter os resultados das ocorrências (votos) dos valores de uma variável (modalidade de esporte). Ao longo dos anos de escolaridade podemos usar tabelas cada vez mais complexas. É comum, já nos dois primeiros anos, os livros proporem o preenchimento de tabelas de dupla entrada, o que pode ser feito, mas precisa ser bem orientado.

A tabela da Figura 12, que relaciona duas variáveis, é uma **tabela de dupla entrada**. Variam os anos de escolaridade (que são mostrados na primeira coluna) e os tipos de doação (apresentados na primeira linha, ou linha de cabeçalho). O preenchimento (ou a leitura) dos dados de tabelas como esta depende da localização do encontro de uma linha com uma coluna. Neste exemplo, para informar quantas latas de leite em pó o terceiro ano doou, é preciso encontrar a célula da tabela em que se encontram a linha relativa ao terceiro ano e a coluna relativa ao leite em pó.

Como já afirmamos, esta é uma boa iniciativa. No entanto, na maioria das vezes, não há preparação dos alunos para lidarem com este recurso de organização da informação. Mesmo quando há um trabalho intencional de ensino do uso de tabelas, aquelas apresentadas sempre são mais simples do que as que serão exigidas em atividades envolvendo outros campos da Matemática.

Arrecadação de doações para a campanha "Ajude um Desabrigado" Produto / Ano	Roupas pessoais	Produtos de higiene	Leite em pó	Litros de água mineral	Quilos de alimentos
1º					
2º					
3º					
4º					
5º					
Total					

Fonte: Doações do mês de abril da Escola Municipal Tiradentes.

FIGURA 12

Lembre-se: precisamos ter cuidado para lidar com as dificuldades que podem aparecer no trabalho das crianças. Algumas vezes, os "erros" apresentados na resolução de uma atividade que envolve o uso de tabelas não se relacionam com o conteúdo em foco, mas com dificuldades no uso de tabelas.

Na Figura 13 mostramos dois casos de uso de tabelas na abordagem de conteúdos de outros campos da Matemática. O preenchimento de tabelas como essas exige a compreensão de tabelas de dupla entrada (localização do encontro de linhas e colunas) e o conhecimento de outro conteúdo.

Campo de Grandezas e medidas

PRODUTO	GRANDEZA	UNIDADE DE MEDIDA	SÍMBOLO
TECIDO	Comprimento	Metro	m
LEITE	Capacidade	Litro	L ou l
CARNE	Massa	Quilograma	kg
GÁS	Volume	Metro cúbico	m^3

Campo de Números e operações

NÚMERO	Dezena	Unidade	Lê-se
23	2	3	Vinte e três
45	4	5	Quarenta e cinco
98	9	8	Noventa e oito
77	7	7	Setenta e sete

FIGURA 13

Os gráficos para apresentação de resultados de pesquisa

Outra forma de organizar os dados é por meio de gráficos e o uso deste recurso é cada vez mais frequente. Gráficos são elementos da linguagem matemática muito importantes e, no campo da Estatística, podemos recorrer a uma grande variedade deles, como gráficos de colunas, de barras, de linha poligonal, de setores, pictogramas e cartogramas. Mais adiante fazemos uma caracterização de cada um destes tipos de gráfico.

O gráfico traçado pode influenciar a interpretação da informação. Podemos chamar a atenção do leitor para algum aspecto da pesquisa, privilegiar ou ocultar alguma informação, dependendo da forma de traçar o gráfico.

A escola precisa preparar as crianças para ler, interpretar e analisar criticamente os diversos gráficos com os quais nos defrontamos hoje em dia. Esta tarefa não depende apenas de expor a elas uma grande diversidade deles. Ao longo da Educação Básica é preciso promover situações nas quais seja necessário tomar decisões sobre a escolha adequada dos gráficos e o uso das regras exigidas para traçá-los. Para cada tipo de gráfico há algumas exigências matemáticas que devem ser respeitadas. Além disso, a escolha do gráfico precisa ser adequada ao tipo de dado coletado e ao tipo de leitura que se deseja favorecer.

Gráficos não são apenas recursos visuais aos quais podemos recorrer, descuidadamente, para enfeitar um texto ou uma notícia.

Observamos que os livros didáticos apresentam diversos gráficos, alguns reproduzidos da mídia impressa, outros criados pelos autores a partir de dados fictícios. Sem dúvida, em grande parte das obras, há a intenção de que as crianças tenham contato com uma boa diversidade de gráficos. Ao trabalhar com esses livros, devemos ter o cuidado de verificar se os tipos de gráficos propostos são adequados aos dados que devem mostrar ou se atendem a requisitos fundamentais, como, por exemplo, apresentar a fonte dos dados utilizados e possuir título descritivo do que o gráfico se propõe a mostrar.

Apresentamos a seguir algumas características básicas dos tipos de gráficos que usamos para apresentar informações estatísticas. Seja qual for o tipo de gráfico, é preciso que ele tenha **título** sendo aconselhável que seja informada a **fonte** dos dados.

Gráficos de colunas

Todo gráfico de coluna deve conter um sistema de eixos perpendiculares e é preciso definir uma escala para cada eixo. Neste tipo de gráfico colocamos no eixo horizontal os valores que a variável pesquisada assume (as possíveis respostas à questão da pesquisa). No eixo vertical é preciso colocar valores numéricos que serão associados ao número de vezes que encontramos cada uma das possíveis respostas à nossa questão. Por exemplo: se queríamos saber quantas meninas e quantos meninos há na turma, a variável da pesquisa é o gênero dos alunos e assume os valores: menino e menina. Se os resultados das contagens de cada valor de nossa variável são 23 meninas e 25 meninos, o eixo vertical deve ser numerado, pelo menos, de 0 a 25 para depois desenharmos as colunas.

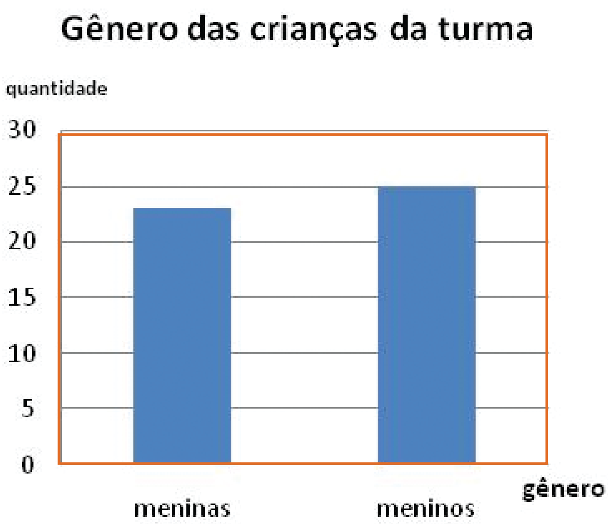
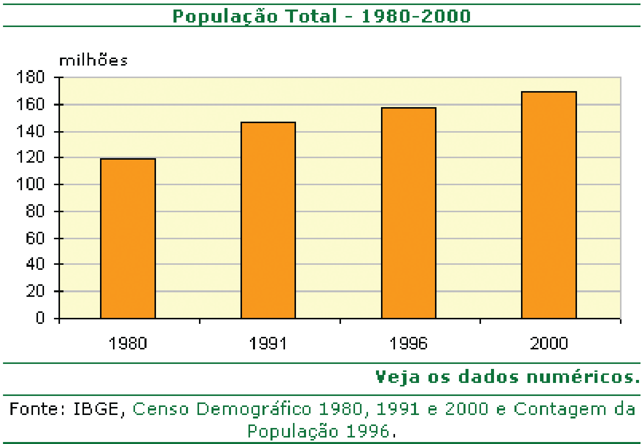
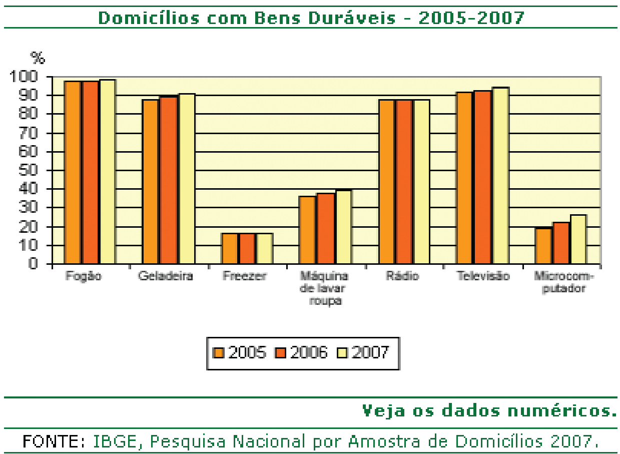


FIGURA 14

Todas as colunas (retângulos) devem ter a mesma largura, suas alturas é que variam, para nos informar sobre o número de ocorrências de cada valor da variável que está no eixo horizontal.

Note que neste tipo de gráfico é preciso deixar espaços entre as colunas. Gráficos sem espaçamento entre as colunas são denominados histogramas e se aplicam apenas a algumas pesquisas, como veremos mais adiante. A seguir trazemos dois exemplos disponíveis no site do IBGE para crianças e adolescentes.





Fonte[1]: http://www.ibge.gov.br/brasil_em_sintese, consultado em 30 de julho de 2009.

FIGURA 15

[1] Os *sites* do IBGE destinados a crianças (IBGE – 7 a 12 anos: www.ibge.gov.br/7a12) e a jovens (IBGE teen: www.ibge.gov.br/ibgeteen) são ótimas fontes para o campo do Tratamento da Informação.

O gráfico que apresenta a população brasileira, de 1980 a 2000, é um gráfico de colunas simples, como o que acabamos de descrever. Já o gráfico que mostra o resultado de uma pesquisa sobre a quantidade de bens duráveis dos domicílios brasileiros, é um gráfico de colunas múltiplas. Gráficos de colunas múltiplas envolvem três variáveis e, por isso, **precisam de legenda**. A variável numérica, que resulta da contagem, dos resultados encontrados no levantamento de dados, continua associada ao eixo vertical. Uma das duas outras (no caso do gráfico de nosso exemplo, tipos de bens duráveis) fica registrada no eixo horizontal e a terceira (no exemplo, os anos) precisa ser registrada em uma legenda.

A imprensa tem recorrido bastante a variações de gráficos de colunas, usando efeitos nas colunas ou transformando-as em paralelepípedos, ou seja, recorrendo a um efeito de tridimensionalidade, que não pode dificultar sua leitura e interpretação.

Algumas inadequações podem ser identificadas em gráficos encontrados na imprensa ou em livros didáticos. Nos exemplos a seguir observam-se alguns problemas frequentes, seguidos de comentários sobre suas inadequações, a fim de alertar o professor sobre como trabalhar corretamente, em sala de aula, com gráficos destes tipos.

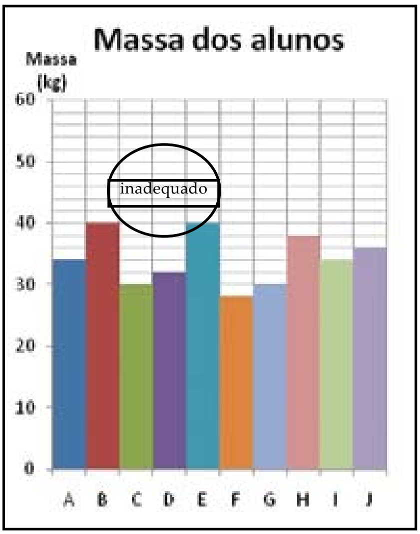


FIGURA 16

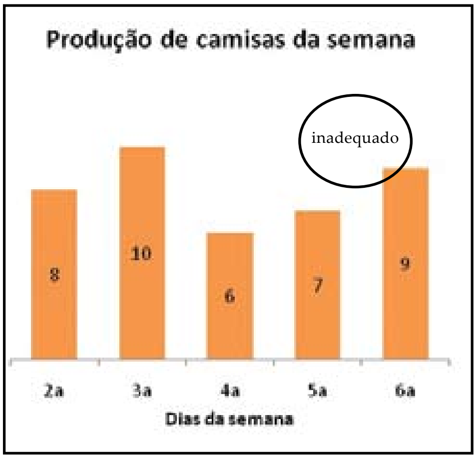


FIGURA 17

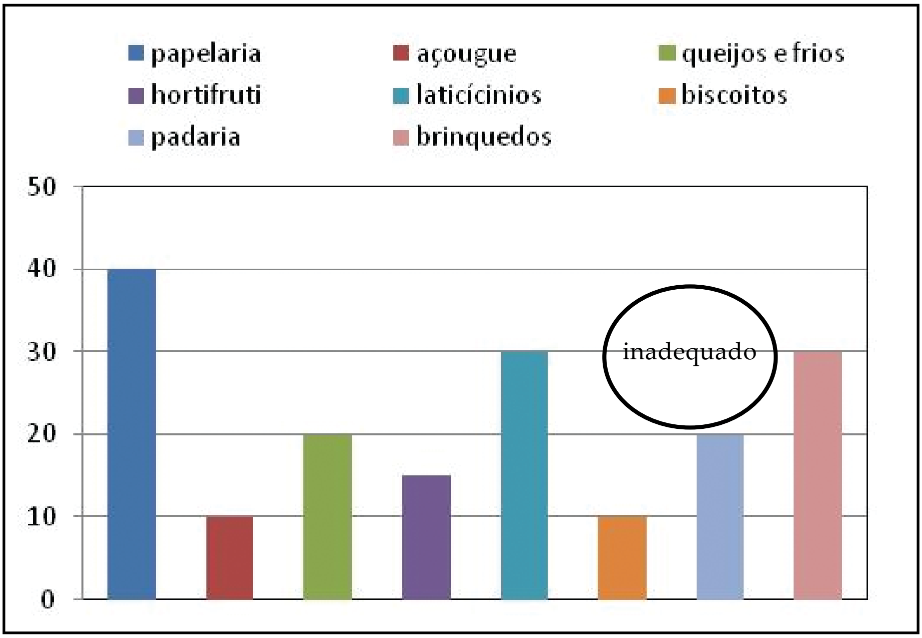


FIGURA 18

Na Figura 16 deveria haver espaçamento entre as colunas, pois cada letra representa um aluno e esta variável não é numérica. No gráfico da Figura 17 não há marcação dos valores do eixo vertical, o que dificulta sua leitura. Há ainda o uso inadequado de legenda, como no exemplo da Figura 18, já que o gráfico não é de colunas múltiplas.

Histogramas

Os histogramas são construídos como os gráficos de colunas. A diferença é que não precisamos deixar espaços entre elas. Mas, quando usá-los?

> Histogramas só devem ser usados quando a variável pesquisada é numérica e os números de um intervalo podem ser um dado da pesquisa.

Este tipo de gráfico é usado, por exemplo, para apresentar a distribuição de notas em um teste, como ocorre na divulgação dos resultados do SAEB e da Prova Brasil pelo Inep (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – (www.inep.

gov.br). Como exemplo, apresentamos na Figura 19 um histograma que mostra a distribuição de notas dos alunos de uma turma em um teste. Para a construção deste gráfico as notas maiores ou iguais a 6,5 e as menores ou iguais a 7,4 foram arredondadas para 7. Assim, observa-se, por exemplo, que 10 alunos desta turma tiraram notas entre 6,5 e 7,4, incluindo estas. Já um aluno que tirou nota 7,5 foi levado em conta na coluna das notas 8.

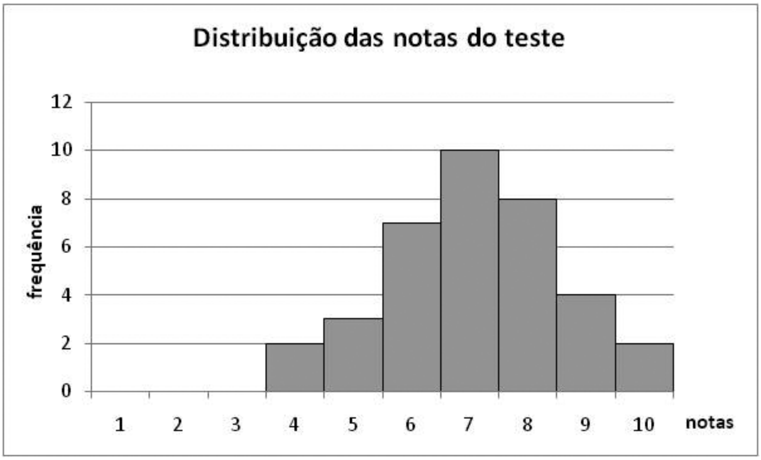


FIGURA 19

Lembre-se: cada recurso de apresentação de dados tem que ser suficiente, ou seja, deve conter todas as informações necessárias para poder ser compreendido, sem depender da consulta a outra fonte, como a tabela à qual o gráfico corresponde.

Gráficos de barras

Observemos os gráficos abaixo. Ambos apresentam o número de medalhas de ouro que os atletas brasileiros conquistaram nos Jogos Pan-Americanos de 1951 a 2007. Como vemos, estes dados poderiam ser apresentados em gráfico de colunas ou de barras. Qual a diferença? A diferença mais importante está na mudança do

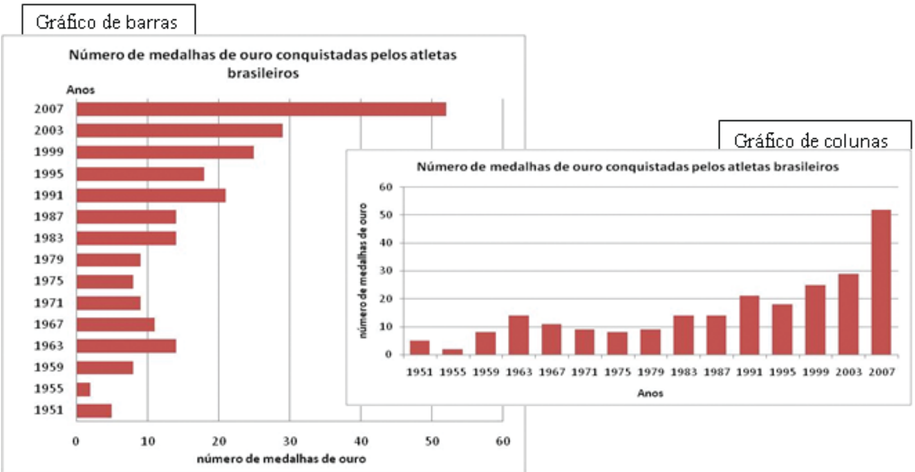


FIGURA 20

eixo que representa cada uma das duas variáveis envolvidas nestes dados (anos dos jogos e número de medalhas).

No gráfico de colunas, os anos dos Jogos estão representados no eixo horizontal e a quantidade de medalhas de ouro no eixo vertical. Já no gráfico de barras, os anos aparecem no eixo vertical e a quantidade de medalhas no horizontal. É isso que faz com que a forma de visualização dos resultados seja diferente. Tal diferença só é verdadeiramente compreendida se somos levados a construir gráficos dos dois tipos e isso ajuda a entender a importância da escolha dos eixos para representar cada variável da pesquisa.

Recomenda-se o uso de gráficos de barras quando a variável para a qual fizemos alguma contagem precisa ser representada por palavras ou expressões. Desta forma, os valores desta variável ficam escritos na horizontal, facilitando a leitura, como se pode observar nos exemplos das Figuras 21 e 22, a seguir.

No gráfico da Figura 21, foi registrado o número de calorias de alguns alimentos e o nome dos alimentos pode ser escrito na horizontal porque estão representados no eixo vertical. No exemplo da Figura 22, os tipos de embalagem recicláveis estão associados ao eixo vertical e o número encontrado de embalagens de cada um dos tipos está representado no eixo horizontal.

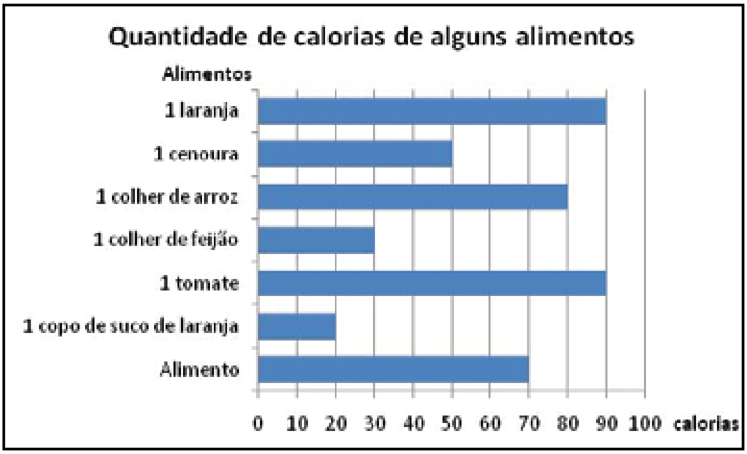


FIGURA 21

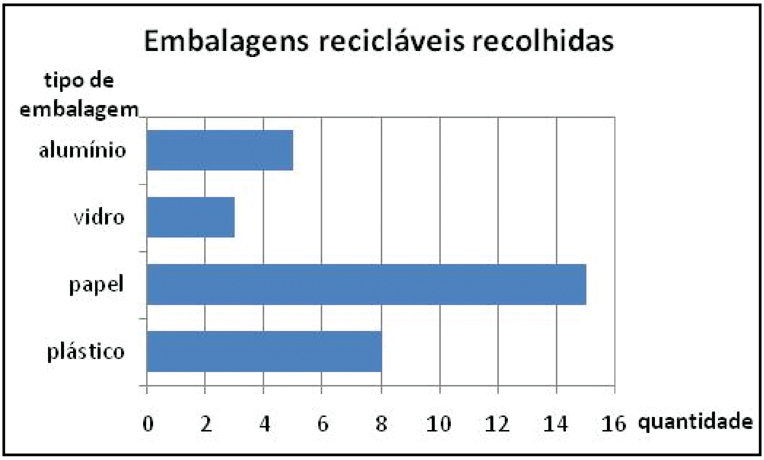


FIGURA 22

Gráficos de linha poligonal

Este tipo de gráfico é mais adequado quando desejamos registrar variações de uma variável ao longo do tempo. Para gráficos de linha poligonal, o eixo horizontal sempre deve estar associado à **variável pesquisada** e o eixo vertical à **contagem das ocorrências – frequência**. Não é possível inverter o que se relaciona com cada eixo.

Nos exemplos a seguir, o uso de gráficos de linha poligonal é adequado. Note que em ambos há título, os eixos apresentam marcações numéricas corretas e estão nomeados, ou seja, informa-se a unidade da variável que está associada a cada um deles. Observe também que o gráfico que apresenta taxas de analfabetismo, Figura 24, traz dados classificados em homens e mulheres e, para isso, foi preciso usar legenda.

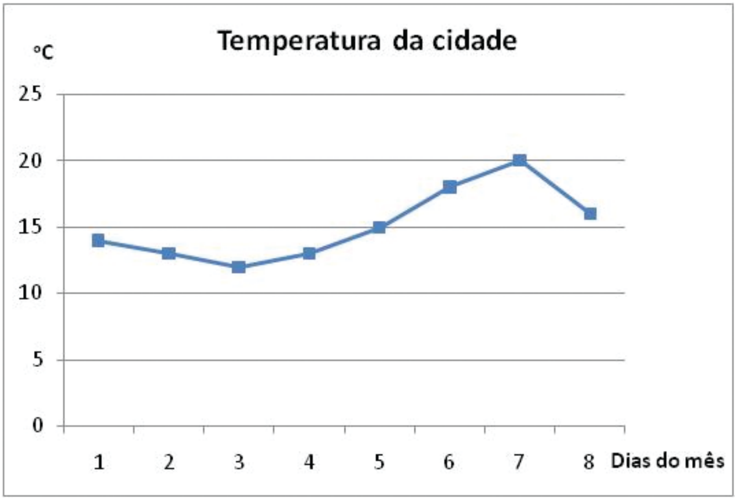
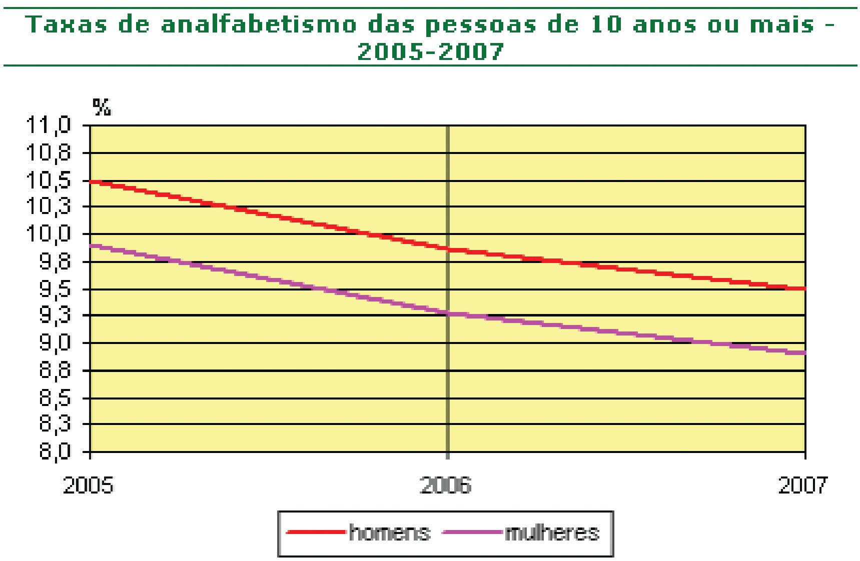


FIGURA 23



Fonte: http://www.ibge.gov.br/brasil_em_sintese, consultado em 30 de julho de 2009

FIGURA 24

Gráficos de linha poligonal, nos livros didáticos avaliados no PNLD 2010, são usados quase que apenas para leitura de dados e costumam aparecer a partir do 4º ano. Não são valorizadas situações nas quais os alunos sejam solicitados a construir gráficos deste tipo.

Voltamos a destacar que uma verdadeira compreensão dos gráficos ocorre quando precisamos traçá-los. Aproveitamos também para reafirmar a importância da escala que será utilizada nos dois eixos.

No caso desses gráficos é preciso estar mais atento ao eixo horizontal, que apresenta dados crescentes no tempo. Uma inadequação bastante comum é haver saltos na sequência temporal estabelecida.

Suponha que um gestor escolar levantou os dados de matrículas de alunos no 1º ano do Ensino Fundamental e não encontrou a informação relativa ao ano de 2003. O que fazer? Observe a tabela com os dados e as soluções apresentadas nos gráficos a seguir.

Matrículas no 1º ano da Escola Mamoré – 2000 a 2008

Ano	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Matrículas no 1º ano	50	55	50	-	68	75	70	73	75

Fonte: secretaria da escola.

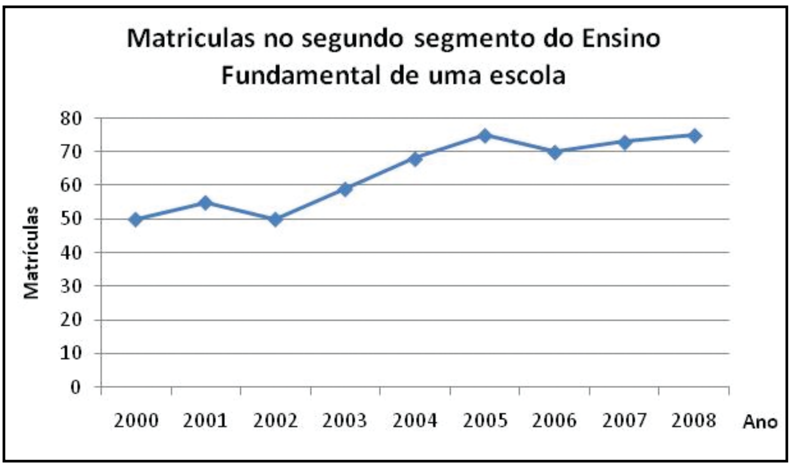


FIGURA 25

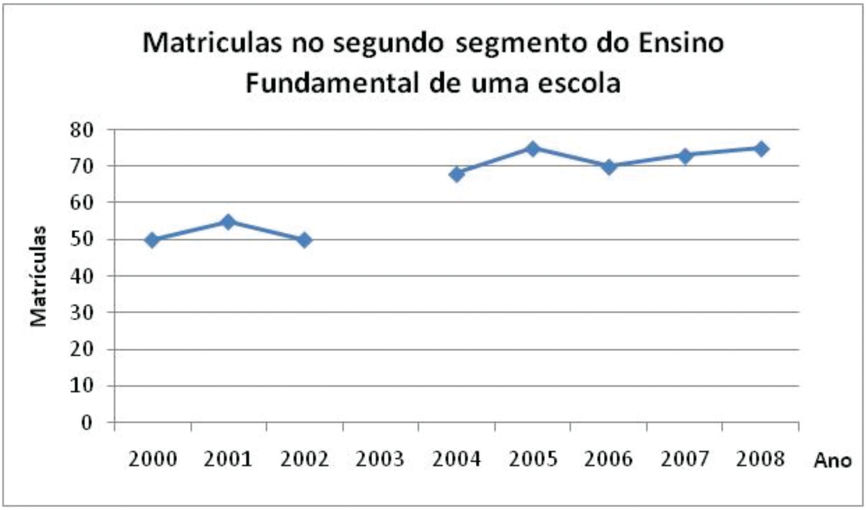


FIGURA 26

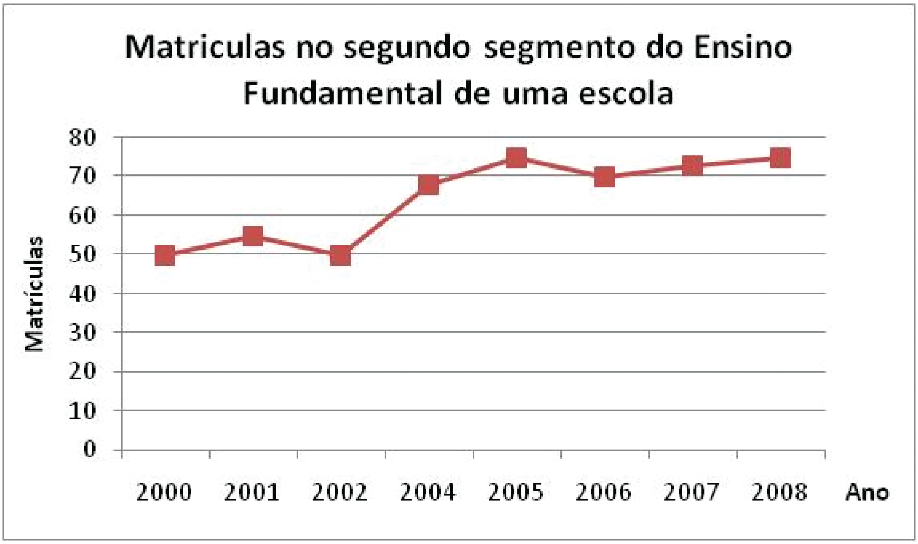


FIGURA 27

No gráfico da Figura 25, foi feita a média dos números de matrícula de 2002 e 2004 e apresenta-se este valor (59) associado ao ano de 2003. Mas, seria preciso avisar ao leitor que o número de matrículas do ano de 2003 é uma estimativa calculada pela média dos anos anterior e posterior a 2003. Informação que poderia ser dada em uma legenda. Na segunda opção, Figura 26, deixou-se em branco a informação não existente. Esta forma de registro está correta e representa exatamente as informações que se tem.

Na representação gráfica da Figura 27, o ano de 2003 foi omitido do gráfico. Esta opção está errada, porque o eixo apresenta a sequência de anos e não se pode pular um deles.

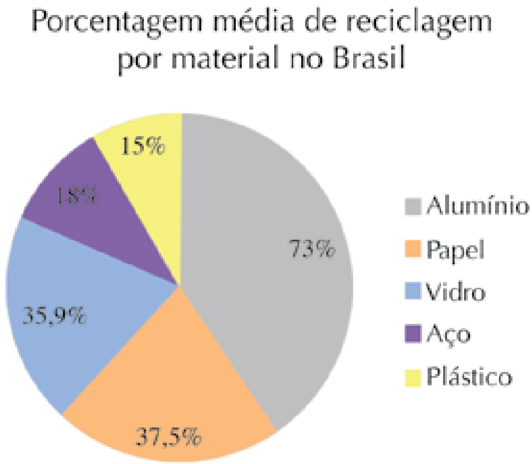
Gráficos de setores

E o gráfico de setores, quando pode ser usado? Este tipo de gráfico tem sido muito utilizado, pela imprensa e em alguns livros didáticos, de forma inadequada. Mais uma vez, podemos reafirmar a importância de termos clareza da questão de pesquisa e da população pesquisada. O gráfico de setores é um círculo subdividido em partes (setores circulares) para apresentar os dados, sendo que este círculo todo deve corresponder a 100% dos resultados.

Outro aspecto a ser levado em conta na escolha de um gráfico de setores para apresentação dos dados da pesquisa é considerar a quantidade de valores que a variável pesquisada pode assumir. Se tivermos muitos valores, o círculo ficará subdividido em uma quantidade de setores que dificulta sua construção, leitura e interpretação.

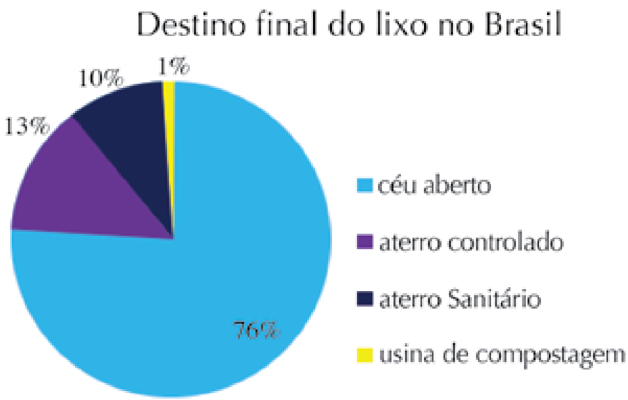
Não devemos esquecer que a construção de gráficos de setores depende de alguns conhecimentos prévios sobre o círculo e seus elementos, além de ser conveniente já saber lidar com ângulos e seu traçado usando um transferidor. No caso de os dados encontrados possibilitarem divisões mais simples, podemos recorrer ao conhecimento de frações e porcentagens para realizar as subdivisões sem o uso do transferidor. Assim, recomendamos que a construção de gráficos de setores seja deixada para o 5º ano ou para os anos finais do Ensino Fundamental. Esta recomendação não invalida um início de trabalho de leitura e interpretação de alguns gráficos de setores simples. No entanto, lembre-se de que esta não é uma habilidade espontânea e que, portanto, merece nossa atenção e planejamento.

Observe nos exemplos a seguir que temos até 5 subdivisões do círculo e que um dos valores se destaca em relação aos demais. Estes são bons exemplos de uso de gráficos de setores. São desaconselháveis aqueles com efeito tridimensional, pois dificultam a diferenciação dos setores do círculo ou podem, até mesmo, nos levar a leituras equivocadas.



Fonte: www.ufv.br/Pcd/Reciclar/Brasil_recicla.htm

FIGURA 28



Fonte: www.cempre.org.br

FIGURA 29

Pictogramas

Este tipo de gráfico quase sempre é construído a partir dos modelos já apresentados. Note que, primeiramente, costuma-se fazer um gráfico de colunas ou de barras e, em seguida, substituir os retângulos por desenhos associados ao tema da pesquisa. É importante observar que, nestes casos, os desenhos que substituem as barras ou colunas devem variar apenas em um de seus comprimentos. Um erro frequente em pictogramas encontrados na mídia é a variação de largura e altura dos desenhos que substituem os retângulos.

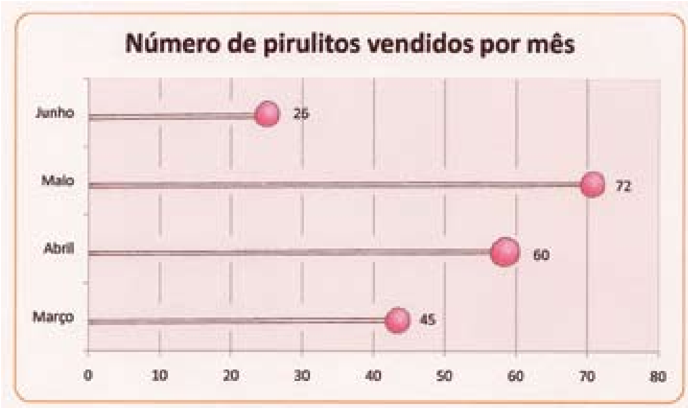


FIGURA 30

Outra forma de produzir pictogramas é usar repetições de desenhos no lugar da coluna ou barra, com cada desenho assumindo um valor que deve ser informado em uma legenda.

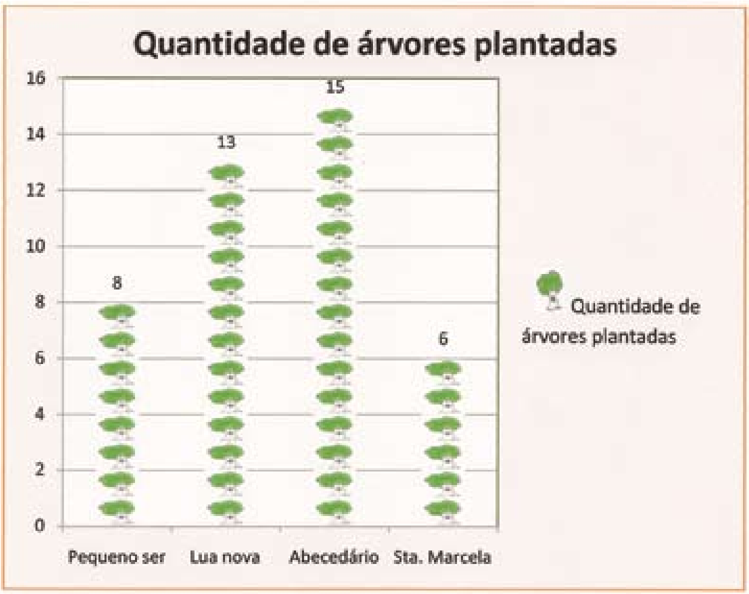


FIGURA 31

Cartogramas

Cartogramas são mapas com alguma informação estatística e costumam ser, frequentemente, encontrados nos livros de Geografia e em Atlas geográficos. Vejamos um exemplo, em que as tonalidades de cores indicam a distribuição geográfica de grupos (percentuais) de pessoas alfabetizadas:

Mapa disponível em: http://www.ibge.gov.br/ibgeteen/atlasescolar/mapas_pdf/brasil_alfabetizacao.pdf

FIGURA 32

Outros conceitos do campo da Estatística

Além do trabalho com pesquisas estatísticas, que envolve a coleta de dados e sua organização, outros conceitos deste campo costumam ser apresentados em alguns livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Nestes casos, é comum encontrarmos capítulos dedicados a este tema que buscam abordar:

uma definição de Estatística, conceitos de população e amostra, conceito e procedimento de cálculo de média e, mais raramente, mediana, moda e desvio padrão.

Consideramos que o trabalho com Estatística nos anos iniciais pode ser apoiado em atividades ou projetos de pesquisa de dados como os exemplificados e discutidos até aqui. Deve ainda abordar o conceito de média e seu cálculo, por ser um conceito usado, com frequência, pelos meios de comunicação e importante para diversas atividades que as crianças já desenvolvem socialmente. Cabe ressaltar que a definição formal do que seja Estatística é muito difícil e precoce para este nível de escolaridade. Assim, quando se busca definir este campo do conhecimento acabam ocorrendo algumas inadequações. Portanto, seria melhor que os alunos fossem percebendo o que se inclui como atividade ou produto deste campo do saber, dentre as informações que recebe, sem necessariamente buscar uma conceituação formal e definitiva.

Tratando-se dos conceitos de população e amostra, a melhor forma de abordá-los é em atividades de pesquisa a serem realizadas pelos alunos e também na leitura e interpretação de dados trazidos pelos livros ou pela mídia.

> Mais uma vez, destacamos que o importante não é a definição rigorosa, mas a possibilidade de o leitor compreender, com clareza, como e com que elementos a pesquisa foi realizada para poder criticar sua validade, sua abrangência e possibilidade de considerar generalizações dos resultados.

Mesmo sabendo que esta preocupação não se faz presente na maioria das atividades que envolvem dados estatísticos apresentados nos livros didáticos, o professor pode sempre comentar com seus alunos: Como será que esta pesquisa foi feita? Quantas pessoas ou objetos devem ter sido pesquisados? O que o pesquisador deveria ter informado para podermos confiar nestes dados? Ter tais elementos em mente ajuda o aluno a desenvolver o senso crítico para aquilo que se lê e vê na mídia, e que, em geral, se costuma considerar como verdade absoluta por ser oriundo de pesquisas estatísticas. Essa é a prática mais importante para a formação de uma cidadania consciente e crítica que busca não ficar ao sabor do que nos é imposto como verdades e valores.

Lembre-se de que hoje os meios de comunicação, em especial a TV, estão investindo cada vez mais no que chamam de programação interativa, que se baseia no que consideram como pesquisa. Nesse caso, é preciso levar em conta, conscientemente, qual é a população investigada (qual o perfil das pessoas que assistem ao programa e que podem ser representadas pelos que participam da enquete) e qual a representatividade da amostra (os que efetivamente participaram respondendo ao chamado do programa). A formação de opinião e de valores com base neste tipo de "pesquisa" é bastante preocupante e deve ser desmistificada.

O trabalho com o conceito de média

O conceito de média é essencial para a Estatística. Ela é uma medida conhecida como "medida de tendência central". Mas o que a média representa?

Quando falamos de temperatura média de uma cidade em um determinado dia, do tamanho médio de calçados dos alunos do 2º ano, da altura média do time de vôlei, dentre tantas outras possibilidades de exemplos, o que estas informações representam? Afinal, a temperatura média da minha cidade naquele dia pode não ter ocorrido em nenhum momento na minha casa; não é possível comprar calçados novos para todos os alunos do 2º ano usando o número de calçado médio; da mesma forma, a altura média dos jogadores pode não ser a altura de nenhum deles. Sendo assim, para que serve esta medida de tendência central?

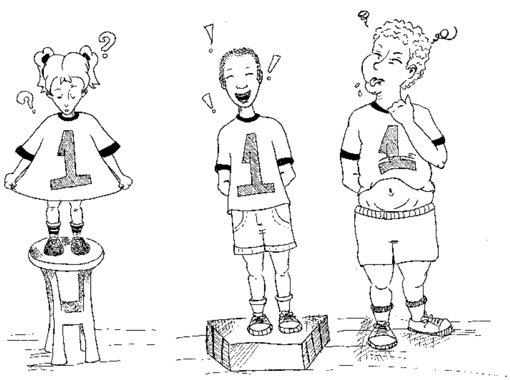


FIGURA 33

Um dos usos importantes da média é a possibilidade de fazermos comparações entre populações diferentes de uma forma mais resumida. É possível comparar a temperatura média de diversas cidades e estabelecer padrões por região, por exemplo. Mas é importante saber também que podemos ter duas cidades com a mesma temperatura média, mas que apresentaram padrões de temperatura bem diferentes uma da outra.

Devemos começar o trabalho com o conceito e o cálculo de médias por intermédio da **média aritmética simples,** de poucos valores numéricos, cuidando para que esta atividade não se restrinja a treino de cálculo. O mais importante é que os alunos discutam o significado da média e, para isso, podemos até principiar com a média entre apenas dois preços, duas medidas de comprimento ou massa, duas idades etc. Obtido o valor, é preciso atenção ao interpretar o seu significado, pois o preço médio de um produto em duas lojas, por exemplo, não é o preço daquele produto em nenhuma das duas lojas. Porém, representa uma boa estimativa do quanto se deve economizar para poder comprá-lo.

Para calcular a média de resultados de algumas pesquisas devemos ter em mente que **a variável pesquisada deve ser numérica**. Não se calcula a média em pesquisas com variáveis, como: gênero, tipo de embalagem, tipo de doação de alimentos, conforme vimos em exemplos discutidos anteriormente neste capítulo. Calcula-se média de variáveis numéricas como: nota em um teste, idade, temperatura, altura, “peso”, tamanho do sapato, quantidade de produtos vendidos em vários dias etc.

Os conceitos do campo da Probabilidade

Os jogos podem ser atividades excelentes para a introdução de conceitos do campo da Probabilidade. Vários tipos deles ajudam a compreender a diferença entre situações aleatórias e determinísticas ou a diferenciar possibilidades de probabilidade, conceitos frequentemente apresentados de forma confusa em grande parte dos livros didáticos avaliados. Nesta seção, vamos recorrer a um exemplo de jogo de fácil realização nas salas de aula, para facilitar a compreensão destes conceitos. É um jogo que envolve a soma de dois dados,

---

[2] MEC/ SEED/ TV Escola. MANDARINO, Mônica, COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. A Matemática como uma rede de conhecimentos: o tratamento da informação. In: Discutindo práticas em Matemática. Boletim 13 do Salto para o Futuro, agosto de 2006.

no qual os alunos devem observar os pontos registrados na face superior dos dados e somar os resultados[2].

Com atividades deste tipo, é possível levar os alunos a compreender termos básicos, usados comumente nos meios de comunicação diante de assuntos relacionados à ciência. Por meio da utilização gradual do vocabulário correto, desenvolve-se o que chamamos de "alfabetização estatística".

Eventos aleatórios

Um evento aleatório está sendo realizado quando: tem a intervenção do acaso, pode ser reproduzido nas mesmas condições iniciais, os resultados possíveis podem ser identificados *a priori*, mas não se pode determinar o resultado final. Neste caso, dizemos que estamos trabalhando em um problema no contexto probabilístico.

Vamos pensar no jogo proposto para nossos exemplos. Antes que os dados se imobilizem, temos como saber quais as faces que sairão? O lançamento dos dados pode ser reproduzido tantas vezes quantas queiramos? Os resultados possíveis podem ser identificados? Todas as respostas a estas perguntas são afirmativas, assim estamos diante de um evento aleatório.

Uma boa definição do experimento proposto aos alunos é fundamental, bem como um bom planejamento. No caso do jogo usado como exemplo, o ideal é que seja realizado em duplas, podendo-se combinar com os alunos:

- Cada dupla se organiza com papel, lápis, dois dados de cores diferentes e um copinho que será usado para misturar os dados e lançá-los sobre a mesa.
- Cada jogador faz uma aposta de resultado e a anota antes do início do jogo.
- Os jogadores lançam os dados alternadamente, 10 vezes cada (o número de vezes pode ser negociado de acordo com os objetivos da atividade, conforme o nível de escolaridade).

Todos estes detalhes fazem parte do planejamento didático da atividade e modificações neste planejamento acarretam mudanças nas estratégias utilizadas pelos alunos para a resolução do problema. Muitas vezes, a definição das estratégias de um jogo ou de um evento, proposto para o trabalho com conceitos deste campo, não é bem feita, o que pode levar a caminhos e soluções que não atendam aos objetivos propostos.

A falta de uma boa definição dos objetivos e etapas do desenvolvimento da atividade também faz com que não haja garantia de características de aleatoriedade para o experimento. Este é um problema frequente dos livros didáticos. É comum tratar como aleatórios eventos que são determinísticos, ou seja, aqueles para os quais há uma resposta que independe do acaso. Outro problema é recorrer a experimentos para os quais não se pode listar previamente o conjunto de resultados possíveis. Um exemplo destas inadequações é tratar como aleatórias as estimativas para o resultado de um cálculo.

O que são possibilidades?

Voltemos ao nosso jogo de dados: Quais as somas possíveis quando lançamos dois dados? A tabela de dupla entrada abaixo apresenta todas as possibilidades de somas dos resultados do lançamento simultâneo dos dois dados.

Resultados possíveis para a soma dos pontos de dois dados.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

FIGURA 34

Se você tivesse que apostar, em qual soma você apostaria? Por quê? Esta é uma boa discussão para se ter com as crianças e envolve de forma adequada o **conceito de possibilidade**. Determinar a priori as possibilidades de um evento é uma das atividades que se pode realizar em sala e envolve este conceito de forma correta. Quando, no entanto, a partir disso, queremos saber a “chance” de uma aposta, estamos no contexto da **probabilidade**. Tal diferenciação é importante e costuma não ser bem feita nos livros didáticos.

Assim, podemos falar em todas as possibilidades, em uma ou algumas possibilidades de resultados, mas este termo é usado de forma inadequada se perguntamos qual a possibilidade de acerto de uma aposta. Neste caso deveríamos dizer: qual a chance ou probabilidade de acerto.

O trabalho com probabilidade

A introdução deste conceito precisa ser bem cuidada. A probabilidade de um evento acontecer é dada por um número, em forma de fração ou porcentagem, que resulta de um cálculo. Se em uma turma temos 20 meninos e 25 meninas, a probabilidade (ou medida da chance) de escolhermos ao acaso uma menina é de $\frac{25}{45} \approx 56\%$ enquanto que a probabilidade (ou medida da chance) de um menino ser sorteado é de $\frac{20}{45} \approx 44\%$

Com o exemplo do jogo de dados é possível explorar o conceito de "chance", sem buscar medi-la. Por exemplo, qual o resultado que tem maior chance de ocorrer, o 4 ou o 8, quando lançamos dois dados e somamos os pontos obtidos? Por quê? Consultando a tabela de possibilidades da Figura 34 os alunos podem concluir que o resultado **8** aparece mais vezes do que o **4** e, portanto, tem mais chance de ocorrer.

Se estivermos trabalhando com crianças maiores, podemos propor o cálculo destas probabilidades. Estudando as possibilidades, vemos que o resultado de soma igual a 4 aparece três vezes (3+1; 2+2; 1+3) e que o resultado 8 aparece cinco vezes (2+6; 3+5; 4+4; 5+3; 6+2). Assim, a chance de em um lançamento dos dois dados a soma dar 4 é de 3, num total de 36 possibilidades, ou seja, a sua probabilidade é

$$\frac{3}{36} = 0{,}0833 \cong 8\%$$

e a chance de dar 8 é maior, de 5 em 36, sua probabilidade é

$$\frac{5}{36} = 0{,}1388 \cong 14\%$$

Note que estes cálculos contribuem para explorarmos conhecimentos mais avançados sobre números e operações.

Este é um momento favorável para trabalharmos com as crianças o fato de que a ocorrência de um resultado no jogo de lançamento dos dados não influencia o cálculo da probabilidade. Cada resultado não interfere também no resultado dos próximos lançamentos. A informação sobre resultados anteriores pode ser útil, no máximo, para nos dar uma dica sobre se os dados estão viciados!

Os jogos e situações simples podem ser um bom contexto para o trabalho com a probabilidade, sem que nos limitemos às situações de mesma chance de ocorrência (**equiprobabilidade**). O mais importante é que a criança perceba que aquilo que ela está observando é um experimento aleatório (no qual pode ser percebida a ação do acaso no decorrer do desenvolvimento do processo observado: os resultados possíveis podem ser identificados, mas não determinados a priori). Afinal, sem acaso não podemos falar de probabilidades.

O estudo da frequência de um evento

Se não é preciso realizar um evento para estudar as possibilidades de resultados e calcular probabilidades, então para que realizá-lo? Primeiramente, destacamos que, para a criança, mesmo em jogos simples, é preciso experimentar o que ocorre ao jogar para poder verificar e compreender as possibilidades de resultados. Tais experiências são também necessárias quando estudiosos da área desejam compreender um fenômeno aleatório. Um segundo objetivo é o estudo estatístico da frequência de resultados. Ele pode conduzir a atividades de pesquisa como as descritas neste capítulo e gerar a produção de tabelas, gráficos e estudo da média.

Vejamos, por exemplo, como continuar explorando o jogo dos dados. Ao final das jogadas, os alunos podem organizar os resultados obtidos.

FIGURA 35

Cada dupla pode construir, em papel quadriculado, com lápis de cor e imaginação, uma primeira "versão" do que virá a ser um gráfico de colunas dos valores obtidos em cada jogada da dupla. A Figura 35 é um exemplo.

Para esta construção vale a pena voltar à lista de resultados possíveis, ou seja, às possibilidades do evento, para definição dos valores a serem listados no eixo horizontal. Pergunte aos alunos: A soma igual a **1** é uma das possibilidades? E a soma igual a números maiores do que **12**?

Observar a sequência de resultados é um bom contato com a ideia de variação. A partir desta observação é possível explorar um pouco mais a ideia de evento aleatório, observando que não é possível prever os resultados com certeza, mesmo conhecendo a probabilidade de ocorrência de cada um deles. Para que pudéssemos aproximar os resultados encontrados daqueles que se obtém pelo cálculo da probabilidade seria preciso realizar o experimento uma enorme quantidade de vezes. Este é um aspecto mal trabalhado pelos livros didáticos! Em muitos deles, propõem-se experimentos para, a seguir, apresentar o conceito de probabilidade a partir da frequência dos resultados obtidos, o que é um erro. Mesmo em eventos com apenas duas possibilidades, como é o caso do lançamento de uma moeda, é inviável realizá-lo um número suficiente de vezes para verificação de que os resultados (cara ou coroa) são equiprováveis, ou seja, que têm ambos, 50% de chance de ocorrer. Não há qualquer garantia de que em **100** lançamentos de uma moeda, **50** serão cara e **50** serão coroa. Também não podemos esperar que após obter uma cara o próximo lançamento vai dar coroa. Assim, o estudo da frequência deve servir para enfatizar que a probabilidade de ocorrência de um evento aleatório não nos traz nenhuma certeza. Este é um raciocínio probabilístico que precisa ser desenvolvido pela escola.

Com este mesmo problema é possível, ainda, explorar o conceito de **porcentagem**. Para isso, basta pensarmos em frequências relativas (porcentagem que cada contagem representa do total) ao invés de frequências absolutas (resultados das contagens). Assim, passamos da simples contagem do número de vezes que ocorreu cada resultado, para uma "comparação" mais apurada que leva em conta a representatividade de cada resultado em relação ao total de jogadas. Ou seja, qual a porcentagem que cada resultado é do total de jogadas.

Destacamos as diversas possibilidades de articulação de conceitos matemáticos que um jogo como o do nosso exemplo proporciona. Claro, quando bem planejado! Além de desenvolver uma postura investigativa, por meio de resolução de problemas, é possível explorar conteúdos matemáticos que utilizem o raciocínio estatístico como ferramenta principal. No jogo proposto é possível explorar: significados de número, ordenação, operações, frações, porcentagens, números decimais, localização no plano por meio da construção de gráficos e tabelas.

Podemos planejar atividades que levem os alunos a resolver problemas interessantes, algumas vezes lúdicos, que atraem o interesse e mostram uma maneira correta e agradável de se fazer Matemática: de forma integrada, sem repartições estanques, isoladas. Além disso, a resolução de problemas contextualizados envolvendo temas do **tratamento da informação** contribui muito para um trabalho colaborativo, entre os alunos e, principalmente, entre alunos e professores.

Indicações Bibliográficas

Documentos oficiais

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Fundamental (SEF). **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática: Terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação / Secretaria de Educação Fundamental (SEF). **Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação / Secretaria de Educação Fundamental (SEF). **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1998. Matemática.

BRASIL, Ministério da Educação / Secretaria de Educação Fundamental (SEF). PNLD 2004 **– Guia de Livros Didáticos 1ª a 4ª séries**. Brasília: MEC/SEF, 2003.

BRASIL, Ministério da Educação / Secretaria de Educação Básica (SEB). PNLD 2007 **– Guia de Livros Didáticos séries/anos iniciais**. Brasília: MEC/SEB, 2006.

BRASIL, Ministério da Educação / Secretaria de Educação Básica (SEB). PNLD 2010 **– Guia de Livros Didáticos séries/anos iniciais**. Brasília: MEC/SEB, 2009.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Fundamental (SEF). **Referenciais para formação de professores**. Brasília: MEC/SEF, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Básica (SEB). **Coleção pró-letramento em Matemática**. Brasília, MEC/SEB, 2007.

Educação

AEBLI, H. **Prática de ensino**. Rio de Janeiro: Vozes, 1975.

ESTEBAN, Maria Teresa. **O que sabe quem erra?** Reflexões sobre avaliação e fracasso escolar. 3. ed. Rio de Janeiro: D P & A, 2002. FAZENDA, I. **Prática de ensino**. São Paulo: Cortez, 1991.

GÉRARD, F.M., ROEGIERS, X. **Conceber e avaliar manuais escolares**. Porto: Porto Editora, 1998.

HERNÁNDEZ, F., VENTURA, *M.* **A organização do currículo por projetos de trabalho**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

PILETTI, Claudino. **Didática especial**. São Paulo: Ática, 1985.

SALVADOR, César Coll. **Aprendizagem escolar e construção do conhecimento**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

PERRENOUD, P. **A pedagogia na escola das diferenças:** fragmentos de uma sociologia do fracasso. Trad. Cláudia Schilling. Porto Alegre: Artmed, 2001.

__________. **Ensinar:** agir na urgência, decidir na incerteza. Porto Alegre: Artmed, 2001.

TARDIF, Maurice. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2003.

Educação Matemática

AZEVEDO, M. V. R. **Jogando e construindo matemática**. São Paulo: Vap, 1999.

BORBA, Marcelo, PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas:** uma estratégia para as aulas de matemática. São Paulo: IME-USP, 1996.

BUSHAW, D. *et al*. **Aplicações da matemática escolar**. São Paulo: Atual Editora, 1997. Tradução de Hygino H. Domingues.

CARDOSO, V. C. **Materiais didáticos para as quatro operações**. São Paulo: IME-USP, 1996.

CARRAHER, D. **Senso crítico:** do dia-a-dia às ciências humanas. São Paulo: Pioneira, 1983.

CARRAHER, T. N. (Ed). **Aprender pensando**. Recife: Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco, 1983.

CARRAHER, T. N. et all. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo: Cortez, 1991.

CARVALHO, Dione Lucchesi de. **Metodologia do ensino da Matemática**. São Paulo: Cortez, 1991.

CENTURIÓN, Marília. **Números e operações.** São Paulo: Scipione, 1995.

CHACÓN. Inês Maria Gómez. **Matemática emocional:** os afetos na aprendizagem matemática. Porto Alegre: Artmed, 2003.

CHEVALLARD, Y, BOSCH, M., GASCÓN, J. **Estudar matemáticas:** o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Trad. Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2001.

COLL, C., TEBEROSKY, A. **Aprendendo Matemática:** conteúdos essenciais para o Ensino Fundamental de 1ª a 4ª séries. São Paulo: Ática, 2000.

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros:** o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

D´AMBRÓSIO, U. **Etnomatemática, arte ou técnica de explicar e de conhecer**. São Paulo: Ática, 1993.

__________. **Educação matemática:** da teoria à prática. Campinas, SP: Papirus, 1996.

DANYLUK, O. **Alfabetização matemática:** as primeiras manifestações da escrita infantil. Porto Alegre: Sulina, 2002.

DAVIS, Philip J. **A experiência matemática**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1981.

DORNELES, Beatriz. **Escrita e número:** relações iniciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

DUHALDE, M. H., CUBERES, M. T. G. **Encontros iniciais com a matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

FONSECA, M. C. F. R. (org). **Letramento no Brasil:** habilidades matemáticas. São Paulo: Global, 2004.

FONSECA, Solange. **Metodologia de ensino:** Matemática. Rio de Janeiro: Lê, 1997.

FRAGA, M. L. **A Matemática na escola primária:** uma observação do cotidiano. São Paulo: EPU, 1988.

KAMII, C. **Crianças pequenas reinventam a aritmética**. Porto Alegre: ArtMed, 2002.

KAMII, C. DEVRIES, R. **A criança e o número:** implicações educacionais da teoria de Piaget para atuação junto a escolares de 4 a 6 anos. Campinas: Papirus, 1996.

__________. **Jogos em grupo na educação infantil:** implicações da teoria de Piaget. São Paulo: Trajetória Cultural, 1991.

KAMII, C., DECLARK, G. **Reinventando a aritmética**. Campinas: Papirus, 1988.

KOTHE, S. **Pensar é divertido**. São Paulo: EPU, 1970.

KRULIK, S., REYS, R. E. (org). **A resolução de problemas na Matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1998.

LEDUR, A., HENNEMANN, J., WOLFF, M. S. **Metodologia do ensino e aprendizagem de Matemática nas séries iniciais de 1º grau**. São Leopoldo: AMECIM/UNISINOS, 1991.

LOVELL, K. **O desenvolvimento dos conceitos matemáticos e científicos na criança**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1988.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e linguagem materna**. São Paulo: Cortez, 1991.

MANDARINO, Mônica, BELFORT, Elizabeth. **Números naturais:** conteúdo e forma. Rio de Janeiro: Ministério da Educação: Universidade Federal do Rio de Janeiro, LIMC – Laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento em Ensino de Matemática e Ciências, 2005.

MANDARINO, Mônica. **Tratamento da Informação para professores de 1ª a 4ª séries**. UFRJ/IM: LIMC, 2005.

MARINCEK, Vania e Equipe Pedagógica da Escola da Vila. **Aprender Matemática resolvendo problemas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 2001.

MENDONÇA, E. R. **Matemática para o magistério**. São Paulo: Ática, 1991.

MIGUEL, Antônio, MIORIM, Ângela. **Ensino de Matemática no 1º grau**. São Paulo: Atual, 1991.

MOUZINHO, M. L. **Tratamento da informação:** explorando dados estatísticos e noções de probabilidade a partir das séries iniciais. UFRJ/IM: Projeto Fundão, 1997.

MOYSÉS, L. **Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática**. Campinas: Papirus, 1997. (Coleção Magistério: Formação e Trabalho Pedagógico).

NEHRING, C. *et al.* **Orientações metodológicas para o uso das barrinhas de cuisenaire**. IJUÍ: UNIJUÍ/PADCT/CAPES, 1995, v.2.

__________. **Orientações metodológicas para o uso da base 10 (material dourado)**. IJUÍ: UNIJUÍ/PADCT/CAPES, 1997, v.3.

NEHRING, C., PIVA, C. **Orientações metodológicas para construção da operação de multiplicação**. IJUÍ: UNIJUÍ, 1998.

NUNES, T., BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 2001.

PAIS, L. C. **Didática da matemática:** uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

PARRA, Cecília, SAIZ, Irma (org.). **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

PIAGET, J. SZEMINSKA, A. **A gênese do número na criança**. Rio de Janeiro: Zahar, 1975.

__________. **Formação do símbolo na criança**. Rio de Janeiro: Zahar, 1971.
PINTO, N.B. **O erro como estratégia didática**. Campinas, Papirus, 2000.

PIRES, Célia Maria. **Currículos de Matemática:** da organização linear à idéia de rede. São Paulo: FTD, 2000.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1977.

POZO, Juan Ignacio. **A solução de problemas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

RABELO, Edmar Henrique. **Textos matemáticos:** produção e identificação. Belo Horizonte: Editora Lê, 1996.

RANGEL, A. C. **Educação Matemática e a construção do número pela criança**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1992.

SANTOS, V. M., REZENDE, J. F. **Números:** linguagem universal. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, projeto fundão, 1997.

SMOLE, K. C. S. DINIZ, M. I., CANDIDO, P. **Resolução de problemas**. Porto Alegre: ArtMed, 2000. (Coleção Matemática de 0 a 6 anos).

SMOLE, K. C. S., DINIZ, M. I., CANDIDO, P. **Ler, escrever e resolver problemas:** habilidades básicas para aprender Matemática. Porto Alegre: ArtMed, 2001. (Coleção Matemática de 0 a 6 anos).

TOLEDO, Marília, TOLEDO, Mauro. **Didática da matemática**: como dois e dois. São Paulo: FTD, 1997.

VITTI, Catarina M. **Matemática com prazer**. Piracicaba: Editora Unimep, 1995.

WALLE, John A. Van de. **Matemática no Ensino Fundamental:** Formação de Professores e Aplicação em sala de Aula. Porto Alegre: Artmed, 2009.

ZUNINO, Delia Lerner. **A Matemática na escola:** aqui e agora. Porto Alegre: Artmed, 1995.

História da Matemática

BOYER, C. B. **História da Matemática.** São Paulo: Edgar Blucher, 1974.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 1995. Traduzido por Hygino H. Domingues.

GRUNDLACH, B. H. **Números e numerais**. Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula (coleção). São Paulo: Atual, 1992. Tradução de Hygino H. Domingues.

IFRAH, George. **Os números**: a história de uma grande invenção. São Paulo: Globo, 1992.

MIORIM, Maria A. **Introdução à história da matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

Livros paradidáticos

BIANCHINI, E., PACCOLA, H. **Sistemas de Numeração ao longo da História**. São Paulo: Editora Moderna, 1997.

GUELLI, O. **A invenção dos números**. São Paulo: Ática, 1992, Coleção contando a história da matemática.

__________. **Jogando com a matemática**. São Paulo: Ática, 1992, Coleção contando a história da matemática.

IMENES, L. M. **Brincando com números**. São Paulo: Editora Scipione, 2000, Coleção vivendo a matemática.

__________. **A numeração indo-arábica**. São Paulo: Editora Scipione, 1991, Coleção vivendo a matemática.

__________. **Problemas curiosos**. São Paulo: Scipione, 1991, Coleção vivendo a matemática.

__________. **Os números na história da civilização**. São Paulo: Scipione, 1990, Coleção vivendo a matemática.

JAKUBOVIC, J. **Par ou ímpar**. São Paulo: Editora Scipione, 1990, Coleção vivendo a matemática.

MACHADO, N. J. **Lógica? É lógico!**. São Paulo: Scipione, 2000, Coleção vivendo a matemática.

PACHECO, E., BURGERS, B. **Série Problemas.** (Problemas à vista; Problemas? Eu tiro de letra!; E aí, algum problema?; Vai um probleminha aí). São Paulo: Editora Moderna, 1998.

RAMOS, L. F. **O segredo dos números**. São Paulo: Ática, 1992, Coleção a descoberta da matemática.

SMOOTHEY, M. **Coleção investigação matemática.** (Estimativas; Gráficos; Números). São Paulo: Editora Scipione, 1997.

STIENECKER, D. L., WELLS, A. **Coleção Problemas, jogos e enigmas** (Números; Adição; Subtração; Multiplicação; Divisão; Frações). Tradução de Suzana Laino Cândido. São Paulo: Editora Moderna, 1998.

WATANABE, R. **Na Terra dos Noves-Fora**. São Paulo: Editora Scipione, 1990, Coleção vivendo a matemática.

Matemática lúdica e curiosidades matemáticas

ENZENSBERG, H. M. **O diabo dos números**. São Paulo: Companhia das Letras, 1997.

GONIK, T. **Truques e quebra-cabeças com números**. Rio de Janeiro: Ediouro, 1997.

LOBATO, M. **Aritmética da Emília**. São Paulo: Editora Brasiliense, 1997.

SMULLYAN, R. **O enigma de Sherazade**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1998.

TAHAN, M. **O homem que calculava**. Rio de Janeiro: Editora Record, 1996.

__________. **Matemática divertida e curiosa**. Rio de Janeiro: Editora Record, 1991.

__________. **As maravilhas da matemática**. Rio de Janeiro: Bloch Editores, 1974.

__________. **Os números governam o mundo**. Rio de Janeiro: Ediouro, 1998.

__________. **A sombra do arco-íris**. Rio de Janeiro: Editora Getulio Costa, 1941.

Revistas

A Educação Matemática em Revista. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM): trimestral.

Revista do Professor de Matemática. Revista da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM): quadrimestral.

Revista Superinteressante, Editora Abril. Revista Globo Ciência, Editora Globo.

Revista Nova Escola, Fundação Victor Civita.

Revista Nós da Escola, Multirio, Prefeitura do Rio de Janeiro.

Sites

www.ibge.gov.br – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.

www.tvebrasil.com.br/salto – Programa Salto para o Futuro da TV Escola / MEC.

www.ipm.org.br – Instituto Paulo Montenegro – Ação Educativa. 2002.

www.sbem.com.br – Sociedade Brasileira de Educação Matemática.